Чоу Вай Кунг
Хо Да
Нг Кок Мин

МАТЕМАТИКА

ИССЛЕДОВАНИЯ И ОТКРЫТИЯ

7 класс

Часть I

Учебник для школ общего среднего образования
с русским языком обучения

Рекомендован к изданию Министерством дошкольного и школьного образования
Республики Узбекистан

МИНИСТЕРСТВО
ДОШКОЛЬНОГО И ШКОЛЬНОГО
ОБРАЗОВАНИЯ

novda
edutainment

Star Publishing Pte Ltd

Ташкент – 2026

УДК: 51:373.5(075.3)
ББК 22.1я72
М 33

Чоу Ваи Кеунг и другие. Математика. Исследования и открытия (Часть I)
7 класс [Текст] : учебник / Чоу Вай Кунг, Хо Да, Нг Кок Мин. –
Ташкент: «Novda Edutainment», 2026. – 228 стр.

Авторы: Чоу Вай Кунг, Хо Да, Нг Кок Мин.

Консультант профессор Линг Сан.

Рабочая группа по адаптации: Боходир Хайдаров, Жамолиддин Сапарбаев, Дурдона Шарипова, Холмирза Юсупов.

Переводчик (с английского на узбекский): Медет Бекназаров.

Переводчик (с узбекского на русский): Балжан Уринбаева.

Рецензенты:
Екатерина Аникина – учитель математики специализированной школы № 6 Сергелийского района города Ташкента;

Наргиза Юлдашева – учитель математики специализированной школы № 300 Сергелийского района города Ташкента.

Адаптированный учебник усовершенствован на основе заключения Института математики им. В. И. Романовского Академии наук Республики Узбекистан.

Данное издание защищено законом об авторском праве. Воспроизведение любой его части запрещается без письменного разрешения издательства “Star Publishing Pte Ltd” и общества с ограниченной ответственностью «Novda Edutainment».

Издание переведено на русский язык, 2026

ISBN 978-9910-586-02-6

© “Star Publishing Pte Ltd”, 2026
© «Novda Edutainment», 2026

ОБ УЧЕБНИКЕ

«МАТЕМАТИКА. ИССЛЕДОВАНИЯ И ОТКРЫТИЯ» – так назван учебник, который сейчас в ваших руках. Такое название связано с тем, что все исследования, направленные на познание мира, основаны, прежде всего, на математике. Этот учебник построен на знаниях и навыках, полученных в предыдущих классах, и написан с учётом личностно-ориентированного подхода.

Важнейшей особенностью данного учебника является то, что он направлен на повышение интереса учащихся к математике, что, в свою очередь, даёт им возможность самостоятельного эффективного изучения математики.

Учебник «МАТЕМАТИКА. ИССЛЕДОВАНИЯ И ОТКРЫТИЯ» охватывает такие разделы, как «Числа и действия», «Алгебра и отношения», «Геометрия и измерения», «Статистика и вероятность», которые помогают учащимся приобрести базовые знания и навыки по этим направлениям. Занятия и упражнения в классе, основанные на практической деятельности, побуждают учащихся проявлять активность, формируют навыки самообучения. Всё вышеперечисленное позволяет глубже понять основные понятия и внутреннюю структуру математики, установить взаимосвязь математики с другими науками.

Учебник направлен на формирование и развитие прочных знаний путём освоения основ математики. Теоретический материал, задачи и примеры в учебнике отличаются своей подачей и интерпретацией. Учащиеся оценивают полученные знания и навыки посредством получаемых в процессе обучения метакогнитивных навыков. Задания побуждают их искать новые знания и находить новые способы решения проблем, тем самым повышая эффективность навыка самообучения.

В структуру учебника также включены общечеловеческие и национальные образовательные ценности. Представлены интересные факты по различным научным дисциплинам, в частности, по истории и математике. Целью учебника является развитие у учащихся когнитивных навыков: логического мышления, рассуждения, математического моделирования, самооценивания и решения проблем, связанных с жизненными ситуациями, посредством задач, примеров и творческих заданий. Учебник предоставляет учащимся возможность применять свои математические знания и навыки для решения этих задач.

В целях развития компьютерных навыков учащихся в учебник включены задания, направленные на формирование навыков информационно-коммуникационных технологий (ИКТ) и программирования.

В начале каждой главы внимание уделяется актуальным задачам из повседневной жизни, что позволяет представить тему через реальные жизненные ситуации, усиливает интерес учащихся к математике и создаёт основу для лучшего усвоения материала. Кроме того, в начале каждой главы указаны основные цели обучения.

В каждой теме с целью помощи учащимся в усвоении знаний и навыков приведено полное решение типовых задач (с поэтапным объяснением). Анализ решения более сложных задач направлен на то, чтобы научить учащихся понимать условия задачи и использовать полученную информацию для нахождения решения. После разобранного примера учащимся предлагается решить аналогичную задачу, чтобы применить и закрепить новые навыки на практике. Также по каждой теме представлены задачи различной степени сложности (начальный, средний, высокий уровень) в виде практических упражнений для закрепления усвоенных знаний и навыков. В конце каждой главы даны дополнительные упражнения для закрепления изученного материала.

ОСНОВНЫЕ РУБРИКИ



АКТИВИЗИРУЮЩЕЕ ЗАДАНИЕ

Рубрика развивает учебные навыки учащихся с помощью заданий, направленных на исследование и открытия.



ПОДУМАЙТЕ

Рубрика состоит из вопросов, направленных на развитие у учащихся соответствующих когнитивных навыков и стимулирующих их к самообучению.



ПРОБЛЕМНОЕ ЗАДАНИЕ

Рубрика демонстрирует нестандартные задачи или проблемные ситуации для развития у учащихся навыков решения проблем. Учащимся предлагается решить задачу, используя четырёхэтапный подход, и представить проблему в виде математической задачи.



МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Рубрика побуждает учащихся размышлять и рассказывать о своём образовательном опыте.



ОБСУДИТЕ

Рубрика способствует дальнейшему развитию знаний и навыков у учащихся, а также уделяет внимание основным понятиям математики.



ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Рубрика позволяет учащимся вспомнить фундаментальные понятия математики и их взаимосвязь, а также даёт советы о том, как их использовать при решении задач.



КЛЮЧЕВЫЕ ТЕРМИНЫ

Рубрика содержит основные термины, рассматриваемые в главе.



ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Рубрика содержит задания, направленные на формирование у учащихся навыков программирования.



ОБРАТИТЕ ВНИМАНИЕ!

Рубрика содержит информацию, на которую следует обратить особое внимание.



ЭТО ИНТЕРЕСНО!

Рубрика демонстрирует научные факты из истории и математики.



ВСПОМНИТЕ!

Рубрика помогает учащимся вспомнить ранее изученные понятия и определения.

СОДЕРЖАНИЕ

ЧИСЛА И ДЕЙСТВИЯ

Глава 1	**Делители и кратные**	**1**
1.1	Простые числа, разложение числа на простые множители и степень	2
1.2	Наибольший общий делитель (НОД)	9
1.3	Наименьшее общее кратное (НОК)	15
1.4	Квадратный корень числа. Кубический корень числа	21
	Основные понятия из главы 1	27
	Повторение главы 1	28
	Проблемное задание	30
	Математический журнал	30
Глава 2	**Действительные числа**	**31**
2.1	Понятие отрицательного числа и числовая ось	32
2.2	Сложение и вычитание целых чисел	37
2.3	Умножение и деление целых чисел. Выполнение действий над целыми числами	44
2.4	Рациональные, иррациональные и действительные числа	51
2.5	Действия над действительными числами	54
	Основные понятия из главы 2	61
	Повторение главы 2	63
	Математический журнал	64
Глава 3	**Приближённое значение числа и прикидка (оценка)**	**65**
3.1	Округление чисел до заданного разряда	66
3.2	Округление чисел до значащей цифры	72
3.3	Прикидка (оценка)	78
	Основные понятия из главы 3	87
	Повторение главы 3	88
	Математический журнал	88

АЛГЕБРА И ОТНОШЕНИЯ

Глава 4	**Основы алгебры и алгебраические действия**	**89**
4.1	Введение в алгебру	90
4.2	Упрощение линейных выражений	100
4.3	Раскрытие скобок в алгебраических выражениях	106
4.4	Разложение алгебраических выражений на множители	114
	Основные понятия из главы 4	117
	Повторение главы 4	118
	Математический журнал	120

ПРОВЕРЬТЕ СВОИ ДОСТИЖЕНИЯ 1 **121**

Глава 5 **Простейшие уравнения с одним неизвестным** **123**
5.1 Простейшие линейные уравнения 124
5.2 Линейные уравнения со скобками и дробями 130
5.3 Простейшие дробно-линейные уравнения 134
5.4 Текстовые задачи на составление линейных уравнений 137
Основные понятия из главы 5 141
Повторение главы 5 142
Проблемное задание 144
Математический журнал 144

ГЕОМЕТРИЯ И ИЗМЕРЕНИЯ

Глава 6 **Углы и параллельные прямые** **145**
6.1 Точка, прямая и плоскость 146
6.2 Углы 149
6.3 Параллельные прямые и секущие 156
Основные понятия из главы 6 163
Повторение главы 6 164
Математический журнал 166

Глава 7 **Треугольники, четырёхугольники и другие многоугольники** **167**
7.1 Треугольники 168
7.2 Четырёхугольники 179
7.3 Многоугольники 190
7.4 Построение треугольников и четырёхугольников 200
Основные понятия из главы 7 205
Повторение главы 7 206
Проблемное задание 208
Математический журнал 208

ПРОВЕРЬТЕ СВОИ ДОСТИЖЕНИЯ 2 **209**

Ответы **210**



ГЛАВА 1

Делители и кратные

1.1 **Простые числа. Разложение числа на простые множители и степень**

1.2 **Наибольший общий делитель (НОД)**

1.3 **Наименьшее общее кратное (НОК)**

1.4 **Квадратный корень числа. Кубический корень числа**

С развитием цифровых технологий информационная безопасность становится всё более актуальной проблемой. Простые числа эффективно используются для защиты личной информации. Кодирование (шифрование) наших персональных данных, например, при проведении онлайн-платежей или использовании банковских услуг, с помощью простых чисел защищает нас от недоброжелательных намерений (действий) других лиц.

Найдите в Интернете другие примеры использования простых чисел в нашей повседневной жизни.

В этой главе мы изучим:

- простые и составные числа;
- запись составного числа в виде произведения простых множителей;
- нахождение наибольшего общего делителя (НОД) и наименьшего общего кратного (НОК) с помощью разложения числа на простые множители;
- нахождение квадратного корня и кубического корня с помощью разложения чисел на простые множители;
- решение задач, связанных с НОД и НОК.

1.1 ПРОСТЫЕ ЧИСЛА. РАЗЛОЖЕНИЕ ЧИСЛА НА ПРОСТЫЕ МНОЖИТЕЛИ И СТЕПЕНЬ

КЛЮЧЕВЫЕ ТЕРМИНЫ

- кратные
- делители
- делимость
- простое число
- составное число
- простые множители
- разложение на простые множители
- показатель степени
- основание
- степень

A Кратные

В этой главе под термином «число» мы будем подразумевать 0 и натуральные числа (1, 2, 3, …).

Число, полученное путём умножения данного натурального числа на натуральное число, называется **кратным** данного числа.

Например,

числа, кратные 3:	3 × 1	3 × 2	3 × 3	3 × 4	3 × 5	…
то есть	3	6	9	12	15	…

B Множители

Произвольное число, большее 1, можно выразить в виде произведения двух натуральных чисел.

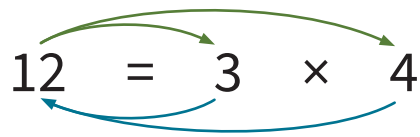
Например,

$$12 = 1 \times 12$$
$$= 2 \times 6$$
$$= 3 \times 4$$

Числа 1, 2, 3, 4, 6 и 12 являются **множителями** числа 12. В этих случаях число 12 делится без остатка на каждый из этих множителей. Поэтому множители числа также называются его **делителями.**

Какую связь вы заметили между кратными и делителями числа?

Число 12 кратно и числу 3, и числу 4.



Числа 3 и 4 – делители (множители) числа 12.

Число, большее 1, делится без остатка на каждый из своих делителей.

ПОДУМАЙТЕ

a) Является ли число 5 делителем числа 10? Почему?
b) Является ли число 3 делителем числа 10? Почему?
c) Может ли число, большее 10, быть делителем 10? Обоснуйте свой ответ.

C Простые и составные числа

АКТИВИЗИРУЮЩЕЕ ЗАДАНИЕ 1

Цель: группировка чисел в зависимости от количества делителей.

1 **a)** Назовите делители чисел от 2 до 12. Ниже приведены делители некоторых чисел.

Число	Произведение(я)	Делители
2	$2 = 1 \times 2$	1, 2
3		
4	$4 = 1 \times 4$ $= 2 \times 2$	1, 2, 4
5		
6		
7		
8		
9	$9 = 1 \times 9$ $= 3 \times 3$	1, 3, 9
10		
11		
12	$12 = 1 \times 12$ $= 2 \times 6$ $= 3 \times 4$	1, 2, 3, 4, 6, 12

b) Сгруппируйте числа от 2 до 12 по количеству их делителей (в качестве образца приведены числа 2 и 4).

Количество делителей	Числа
Два	2, ☐, ☐, ☐, ☐
Больше двух	4, ☐, ☐, ☐, ☐, ☐

2 Обратите внимание на числа, которые имеют только два делителя. Что вы можете сказать об их делителях?

ОБРАТИТЕ ВНИМАНИЕ!

В равенстве $4 = 2 \times 2$ число 2, являющееся делителем числа 4, в списке делителей записывается один раз, хотя в равенстве записано два раза.

С помощью **активизирующего задания 1** мы определили следующее:

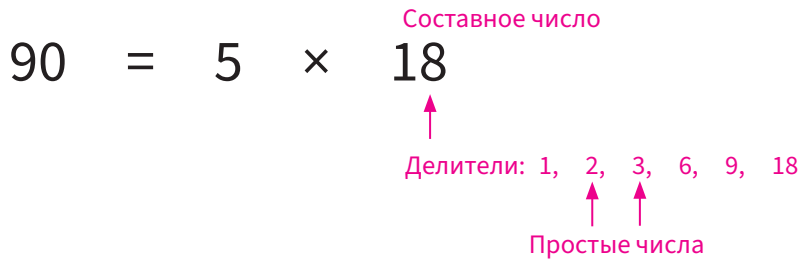
- **Число, большее 1, может иметь два или более делителей. Число, имеющее только два делителя (1 и само число), называется простым числом.**
- **Число, у которого более двух делителей, называется составным числом.**
- **Число, большее 1, может быть либо простым, либо составным числом.**

Памятка Числа 0 и 1 – ни простые, ни составные.

ПОДУМАЙТЕ

1. Почему 0 и 1 не являются простыми числами?
2. Может ли число быть одновременно и простым и составным? Почему?

Чтобы определить, является данное число простым или составным, надо проверить делимость числа на простые числа, меньшие, чем само число. Если число делится на составное число, то данное число делится на все простые делители данного составного числа.



1 ПРИМЕР

Определите, какими числами являются следующие числа: простыми или составными.

a) 143 **b)** 29

РЕШЕНИЕ

a) Проверьте, делится ли число 143 на простые числа, меньшие самого числа (2, 3, 5, 7, 11, …).

143 ÷ 11 = 13

∴ 143 – составное число, так как имеет более двух делителей.

Памятка Делители числа 143 – числа 1, 11, 13 и 143.

b) Проверьте, делится ли число 29 на простые числа, меньшие самого числа. Число 29 не делится ни на одно простое число.

∴ 29 – простое число, так как имеет только два делителя (1 и само число).

1 ПРОВЕРЬТЕ СЕБЯ

Определите, какими числами являются следующие числа: простыми или составными.

a) 234 **b)** 171 **c)** 31

ПОДУМАЙТЕ

1. Покажите, что следующие числа являются составными.

a) 135 **b)** 485 **c)** 920 **d)** 2320
e) 72 **f)** 134 **g)** 836 **h)** 7128

2. На основе выводов по заданию 1 определите, как можно использовать последнюю цифру числа, чтобы определить, является ли число составным.

ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Знакомы ли вы с программированием? Если да, то можете ли вы написать программу, проверяющую, является ли число простым? Для размышления можете использовать блок-схему на странице 62.

ВСПОМНИТЕ

С помощью **активизирующего задания 1** мы определили все простые числа, меньшие 12. Это 2, 3, 5, 7 и 11.

D Разложение числа на простые множители

Дано составное число 30. Если записать число 30 в виде произведения простых множителей, то получим:

$$30 = 2 \times 3 \times 5.$$

Составное число — Простые множители числа 30

2, 3 и 5 являются **простыми множителями** числа 30.

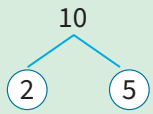
АКТИВИЗИРУЮЩЕЕ ЗАДАНИЕ 2

Цель: запись числа, большего 1, в виде произведения его простых множителей.

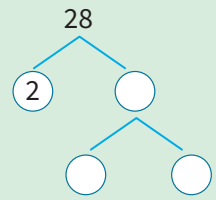
1 **a)** Перечертите следующие схемы в тетрадь и заполните пустые ячейки.

Образец выполнения даётся в задании 1).

1)



2)



b) Запишите числа 10 и 28 в виде произведения простых множителей.
Образец выполнения даётся в задании **1**.

1) $10 = 2 \times 5$ **2)** $28 =$ _____

2 **a)** Заполните каждое дерево множителей.

Дерево множителей 1	Дерево множителей 2	Дерево множителей 3
280 10 28	280 2 140	280 4 70

b) Используя каждое дерево множителей, запишите число 280 в виде произведения простых множителей.

Дерево множителей 1: 280 = _____

Дерево множителей 2: 280 = _____

Дерево множителей 3: 280 = _____

c) Что можете сказать о произведении в задании **2** **b)**?

С помощью **активизирующего задания 2** мы определили, что число можно записать в виде нескольких произведений множителей.

Например, $280 = 10 \times 28$

$280 = 2 \times 140$

$280 = 4 \times 70$ и т. д.

ОБРАТИТЕ ВНИМАНИЕ!

Не путайте разложение на множители числа 30 с нахождением его делителей.

$30 = 2 \times 15$

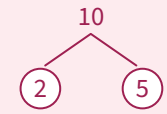
$= 3 \times 10$

$= 5 \times 6$

Делители числа 30: 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15 и 30. Необязательно, чтобы множители в этом списке были простыми числами. Например, 6 – не простое число, оно не является простым множителем числа 30.

ОБРАТИТЕ ВНИМАНИЕ!

На этой схеме показано дерево множителей.



Какое равенство бы ни взяли, мы получим одинаковое произведение простых множителей.

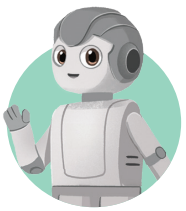
$$280 = \mathbf{2} \times \mathbf{2} \times \mathbf{2} \times \mathbf{5} \times \mathbf{7}$$

Кроме того, от перестановки мест простых множителей произведение не изменится.

- **Любое натуральное число, большее 1, можно записать единственным образом в виде произведения простых множителей.**
- **Запись числа в виде произведения простых множителей называется разложением на простые множители этого числа.**

РАВНОСИЛЬНОСТЬ ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Произведения $2 \times 5 \times 2 \times 2 \times 7$ и $2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 7$ равносильны, так как значения обоих выражений равны 280.



2 ПРИМЕР

Запишите число 126 в виде произведения простых множителей.

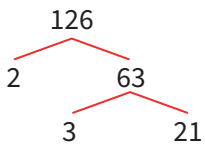
РЕШЕНИЕ

Способ 1. Дерево множителей

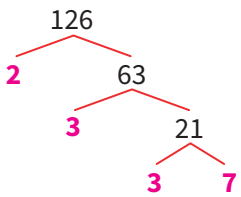
Дерево множителей можно получить следующим образом:



Запишем натуральные числа, произведение которых равно 126. Например, $126 = 2 \times 63$.



Число 2 является простым, поэтому его дальнейшее разложение невозможно. Разложение числа 63 на множители продолжается.



Закончим разложение тогда, когда в последней строке останутся простые множители. Произведение всех простых множителей на дереве называется разложением данного числа на простые множители.

Запишем число в виде произведения простых множителей:

$126 = 2 \times 3 \times 3 \times 7$.

Способ 2. Способ краткого деления

126	**2**
63	**3**
21	**3**
7	**7**
1	← Частное равно 1

Разложение числа на простые множители – это представление данного числа в виде произведения его простых делителей.

$\therefore 126 = 2 \times 3 \times 3 \times 7$

РАВНОСИЛЬНОСТЬ ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Известно, что

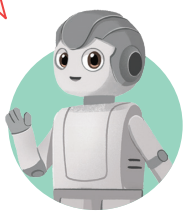
$126 = 2 \times 63$
$= 2 \times 3 \times 21$
$= 2 \times 3 \times 3 \times 7$.

Знак равенства «=» означает,

что все произведения:

2×63, $2 \times 3 \times 21$ и $2 \times 3 \times 3 \times 7$

равносильны, так как значения всех выражений 126.



2 ПРОВЕРЬТЕ СЕБЯ

Разложите на множители число 585, используя следующие способы.

a) Дерево множителей **b)** Краткое деление

ПОДУМАЙТЕ

a) С какого числа вы начнёте деление, если вас попросят записать число 360 в виде произведения простых делителей способом краткого деления? Почему?

b) Удобно ли начинать деление с наименьшего простого числа при использовании способа краткого деления? Почему?

E Обозначение степени

С помощью **активизирующего задания 2** мы определили, что $280 = 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 7$. Здесь мы можем увидеть произведение трёх чисел 2. Для краткой записи можно использовать **знак степени:** 2^3. Тогда, $280 = 2^3 \times 5 \times 7$.

$2 \times 2 \times 2 = \mathbf{2^3}$ читается: **«2 в третьей степени»** или **«2 в кубе»**.



В этой записи число 2 – **основание**, число 3 – **показатель степени**, 2^3 – **степень**.

Показатель степени указывает на то, сколько раз число берётся в качестве множителя.

Таким образом,

$2 \times 2 = \mathbf{2^2}$ – это **«2 во второй степени»** или **«2 в квадрате»**,
а $2 \times 2 \times 2 \times 2 = \mathbf{2^4}$ – это **«2 в четвёртой степени»**.

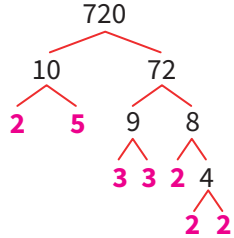
Для краткой записи разложения числа на простые множители мы можем использовать знак степени.

3 ПРИМЕР

Запишите разложение числа 720 на простые множители, используя знак степени.

РЕШЕНИЕ

Способ 1. Дерево множителей



$\therefore 720 = 2 \times 5 \times 3 \times 3 \times 2 \times 2 \times 2$
$= 2^4 \times 3^2 \times 5$ (с показателем степени)

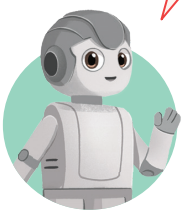
Способ 2. Краткое деление

720	2
360	2
180	2
90	2
45	3
15	3
5	5
1	

$\therefore 720 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5$
$= 2^4 \times 3^2 \times 5$ (с показателем степени)

ОБОЗНАЧЕНИЯ

Обозначения (знаки) – это символы, используемые для краткого обозначения математических объектов, действий и соотношений. Например, запись $6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6$ пишем как 6^5.



ОБРАТИТЕ ВНИМАНИЕ!

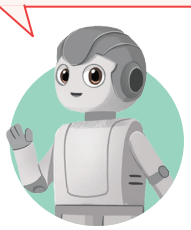
Выражения 2^4 и 2×4 не равны.

$2^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2$
$= 16$

$2 \times 4 = 8$

РАВНОСИЛЬНОСТЬ

Выражения $2^4 \times 3^2 \times 5$ и $5 \times 2^4 \times 3^2$ равносильны, так как значения обоих равны 720. Если записать простые множители в другом порядке, произведение всё равно будет равным 720. Можете ли привести примеры произведений, равносильных данному выражению?



3 ПРОВЕРЬТЕ СЕБЯ

Разложите на простые множители число 702, используя знак степени.

1.1 ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ

НАЧАЛЬНЫЙ УРОВЕНЬ

1 Определите, простыми или составными являются следующие числа.

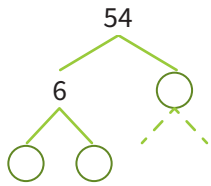
a) 85 **b)** 83
c) 103 **d)** 323

2 Запишите в виде степени.

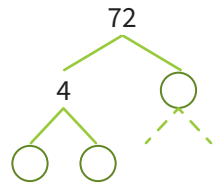
a) $8 \times 8 \times 8$ **b)** $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$
c) $7 \times 7 \times 9$ **d)** $4 \times 4 \times 6 \times 6$
e) $2 \times 3 \times 11 \times 11 \times 11$ **f)** $5 \times 5 \times 13 \times 5 \times 13 \times 37$

3 Найдите простые множители следующих чисел, используя дерево множителей. Запишите каждое число в виде произведения степеней простых множителей.

a)



b)



4 Найдите простые множители (делители) следующих чисел способом краткого деления. Запишите каждое число в виде произведения степеней простых множителей.

a)

784	2
392	2
196	

b)

4851	3
1617	3

c)

6125	5

5 Запишите следующие числа в виде произведения степеней простых множителей.

a) 180 **b)** 616
c) 735 **d)** 1350

СРЕДНИЙ УРОВЕНЬ

6 Вычислите.

a) Наименьший простой делитель числа 377.
b) Наибольшее кратное числа 17, меньшее 1000.
c) Наименьшее кратное числа 19, большее 500.

7 **a)** Запишите первые 10 чисел, кратных 2.
b) Запишите первые 10 чисел, кратных 3.
c) Запишите первые 3 числа, кратные 2 и 3.
d) Что вы можете сказать об общих кратных чисел 2 и 3 из задания **c)**?

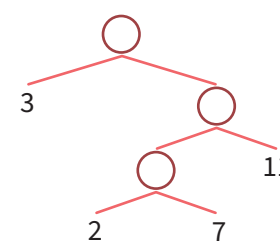
8 Определите, верны или ложны следующие высказывания. Если высказывание ложно, приведите обратный пример (контрпример).

a) Если 6 является делителем какого-либо числа, то 3 также будет делителем этого числа.
b) Если числа 2 и 7 являются делителями какого-либо числа, то 14 также будет делителем этого числа.
c) Если числа 2 и 8 являются делителями какого-либо числа, то 16 также будет делителем этого числа.

Памятка Контрпример – это пример, опровергающий верность какого-либо утверждения.

9 Чему равна сумма двух натуральных чисел, если их произведение равно 37?

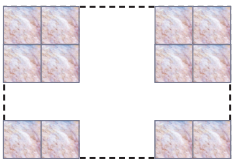
10 **a)** Как можно найти число на вершине дерева множителей, не зная недостающих двух чисел?



b) Заполните дерево множителей.

ВЫСОКИЙ УРОВЕНЬ

11 Прямоугольная стена покрыта одинаковыми квадратными плитками.



Определите, какие измерения может иметь стена, если для её покрытия было использовано:

a) 18 плиток **b)** 41 плитка

12 Код замка – трёхзначное число. Аскар знает, что это число – наименьшее простое число, большее 100. Какое это число?



13 открытое Объём кубоида равен 40 cm^3. Какими могут быть два варианта его измерений, если известно, что они выражены натуральными числами?



14 Какой цифрой может быть последняя цифра двузначного простого числа? Обоснуйте свой ответ.

15 Учитель разделил 60 учащихся на равные группы. Количество детей в каждой группе больше 2, но меньше 8. Сколькими способами можно разделить учащихся на группы?

16 Найдите два последовательных простых натуральных числа. Существуют ли другие последовательные числа с такими же свойствами? Обоснуйте свой ответ.

17 открытое Число разложили на множители в виде $24 \times 35 \times 72 \times 11$. Найдите три делителя этого числа, бóльшие 100.

1.2 НАИБОЛЬШИЙ ОБЩИЙ ДЕЛИТЕЛЬ (НОД)

Найдём делители (множители) чисел 18 и 24.

Делители числа 18: **1**, **2**, **3**, **6**, 9, 18
Делители числа 24: **1**, **2**, **3**, 4, **6**, 8, 12, 24

Общие делители чисел 18 и 24 – это 1, 2, 3 и 6. Поэтому оба числа делятся без остатка на 1, 2, 3 и 6. Наибольшее из них 6. Отсюда следует, что **наибольшим общим делителем (НОД)** чисел 18 и 24 является 6.

Наибольшим общим делителем двух или нескольких натуральных чисел называется наибольшее число, на которое делится каждое из данных чисел.

Кроме того, НОД используется для записи обыкновенной дроби в несократимом виде. Например, для того чтобы записать дробь $\frac{18}{24}$ в несократимом виде, надо числитель и знаменатель дроби разделить на НОД этих чисел следующим образом.

$$\frac{18}{24} = \frac{18 \div 6}{24 \div 6} \quad \text{НОД чисел 18 и 24 является число 6.}$$

$$= \frac{3}{4}$$

КЛЮЧЕВЫЕ ТЕРМИНЫ

- общие делители
- наибольший общий делитель (НОД)

ВСПОМНИТЕ

Если число делится на другое число, остатка не будет.

ЭТО ИНТЕРЕСНО!

НОД также называют наибольшим общим множителем.

4 ПРИМЕР

Найдите наибольший общий делитель чисел 225 и 750.

РЕШЕНИЕ

Способ 1. Разложение на простые множители

Запишем каждое из чисел 225 и 750 в виде произведения простых множителей:

$225 = 3^2 \times 5^2$

$750 = 2 \times 3 \times 5^3$.

Нахождение общих делителей можно выразить следующим образом:

$$\begin{array}{lll} 225 & = & 3 \times 3 \times 5 \times 5 \\ 750 & = & 2 \times 3 \times 5 \times 5 \times 5 \\ \hline \text{НОД} & = & 3 \times 5 \times 5 \end{array}$$

$\therefore$ НОД $= 3 \times 5^2$ Число 3 меньше 3^2, а число 5^2 меньше 5^3.

$= 75$

Памятка НОД трёх произвольных чисел равен произведению **наименьших** степеней общих делителей данных чисел. Ответ на предыдущий пример найден путём умножения **наименьших** степеней общих делителей каждого числа, т. е. умножением 3 и 5^2.

Способ 2. Способ краткого деления

Данные два числа будем делить на их общие простые делители один за другим. Продолжим деление до тех пор, пока общих делителей не останется.

Например,

750	225	**3**
250	75	**5**
50	15	**5**
10	3	

← Каждый делитель является простым делителем чисел 225 и 750.

← Общих простых делителей нет.

$\therefore$ НОД $= 3 \times 5 \times 5$

$= 75$

Памятка Произведение всех общих простых делителей двух чисел называется их НОД.

ПОДУМАЙТЕ

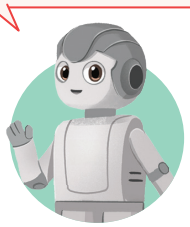
Станет ли дробь $\frac{225}{750}$ несократимой, если разделить числитель и знаменатель дроби на их НОД? Обоснуйте свой ответ.

ОБСУДИТЕ

Мы нашли наибольший общий делитель двух или нескольких чисел, но почему не нашли наименьший общий делитель?

РАВНОСИЛЬНОСТЬ ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Известно, что выражения 225 и $3^2 \times 5^2$, 750 и $2 \times 3 \times 5^3$ равны. Используя разложение чисел 225 и 750, можно легко найти НОД этих чисел.



ОБСУДИТЕ

1. Чему равен НОД двух простых чисел? Обоснуйте свой ответ.

2. Может ли НОД двух натуральных чисел быть равным 0? Обоснуйте свой ответ.

4 ПРОВЕРЬТЕ СЕБЯ

a) Найдите НОД чисел 252 и 360 путём разложения на простые множители.

b) Найдите НОД чисел 882 и 945, используя способ краткого деления.

5 ПРИМЕР

Найдите НОД чисел 84, 126 и 245.

РЕШЕНИЕ

$84 = 2^2 \times 3 \times 7$

$126 = 2 \times 3^2 \times 7$

$245 = 5 \times 7^2$

НОД $= 7$

Разложив числа на простые множители, можно определить результат, выбрав наименьшую степень каждого общего простого множителя.

Число 7 является единственным общим простым делителем чисел 84, 126 и 245.

$\therefore$ НОД = 7

ЭТО ИНТЕРЕСНО!

Если два числа, например 15 и 16, не имеют общих делителей, больших 1, то их НОД равен 1 и эти числа называются взаимно простыми числами.

ПОДУМАЙТЕ

В предыдущем примере мы выяснили, что число 7 является НОД чисел 84, 126 и 245.

a) Является ли число 7 НОД любой пары из этих трёх чисел?

b) НОД каждой пары чисел больше или меньше 7? Обоснуйте свой ответ.

5 ПРОВЕРЬТЕ СЕБЯ

a) Найдите НОД чисел 77, 110 и 242.

b) Найдите НОД чисел 21, 108 и 275.

6 ПРИМЕР

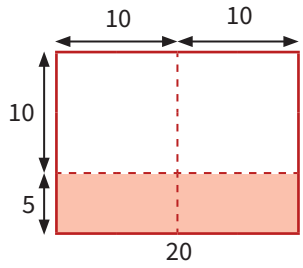
Земельный участок прямоугольной формы со сторонами 20 m и 15 m разделён на равные квадратные площадки.

a) Определите наибольшее возможное значение стороны квадратных площадок.

b) На сколько частей разделён участок в таком случае?

АНАЛИЗ

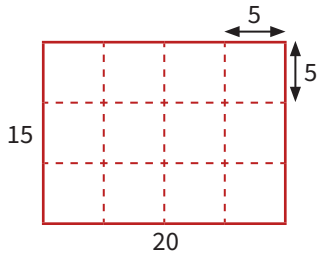
Длины сторон прямоугольного участка (20 m и 15 m) должны делиться на длину стороны квадратной площадки без остатка. Но если взять сторону квадратной площадки, равную 10 m, то 15 не делится на 10, поэтому такое разбиение невозможно. Следовательно, длина стороны квадратной площадки должна быть общим делителем чисел 20 и 15.



Наибольшее возможное значение стороны квадратных площадок является наибольшим общим делителем (НОД) чисел 20 и 15.

РЕШЕНИЕ

a) $20 = 2^2 \times 5$
$15 = 3 \times 5$
НОД чисел 15 и 20 равен 5.
Наибольшее возможное значение стороны каждой квадратной площадки равно 5 m.



b) Число квадратов по длине земельного участка
$= 20 \div 5$
$= 4$

Число квадратов по ширине земельного участка равно $15 \div 5 = 3$

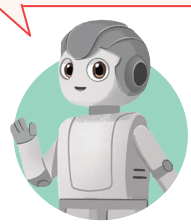
Следовательно, число квадратных площадок равно $4 \times 3 = 12$.

Определим число квадратных площадок другим способом.
Число квадратных площадок = площадь прямоугольника ÷ площадь одного квадрата
$= (20 \times 15) \div (5 \times 5)$
$= 12$

ЧЕРТЕЖИ

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

При решении задач можно использовать чертежи. Для изображения прямоугольного земельного участка начертили прямоугольник. Чтобы увидеть связь между длиной, шириной прямоугольника и стороной квадрата, прямоугольник разделили на квадраты.



ОБСУДИТЕ

Как можно найти наименьшую сторону квадратных площадок?

6 ПРОВЕРЬТЕ СЕБЯ

Кубоид с измерениями 56 cm, 40 cm и 24 cm разделили на равные кубы.

a) Найдите наибольшую возможную длину ребра полученного куба.

b) Определите число кубов из задания **a)**.

7 ПРИМЕР

У Камолы имеется 252 яблока и 360 гранатов. Она хочет разложить фрукты поровну по одинаковым корзинам так, чтобы ни один фрукт не остался.

a) Каково наибольшее возможное число корзин, в которые Камола может распределить фрукты поровну?

b) Сколько яблок в каждой корзине?

АНАЛИЗ

Чтобы понять задачу и найти способ её решения, решим задачу с меньшим количеством фруктов. Например, распределим 20 яблок и 15 гранатов.

Если число корзин 2, то 20 яблок мы сможем распределить поровну, но 15 гранатов не сможем.

Если число корзин 3, то 20 яблок мы не сможем распределить поровну, но 15 гранатов сможем.

Отсюда следует, что число корзин, по которым можно разложить фрукты поровну, является общим делителем числа яблок и гранатов. Наибольшее возможное число корзин, в которые Камола может распределить фрукты, является НОД числа яблок и гранатов.

РЕШЕНИЕ

a) Разложим на простые множители каждое число.

$252 = 2^2 \times 3^2 \times 7$

$360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$

НОД чисел 252 и 360 $= 2^2 \times 3^2$

$= 36$

Наибольшее возможное число корзин, в которые Камола может разложить фрукты, составляет 36 штук.

b) $252 \div 36 = 7$

Число яблок в каждой корзине равно 7.

ПОДУМАЙТЕ

Изменится ли ответ задачи **из примера 7 a)**, если Камола захочет разложить по корзинам ещё 72 груши? Обоснуйте свой ответ.

7 ПРОВЕРЬТЕ СЕБЯ

Для подготовки концертной программы собрались участники трёх категорий. В категории танцовщиков – 48 человек, в категории музыкантов – 84, а в категории певцов – 144. Все участники хотят готовиться к концерту, разделившись на несколько команд с равным числом человек.

a) Найдите наибольшее возможное число образованных команд.

b) По сколько человек каждой категории будет в команде?

1.2 ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ

НАЧАЛЬНЫЙ УРОВЕНЬ

1 Найдите НОД чисел.

a) 8 и 12 **b)** 45 и 72
c) 74 и 99 **d)** 120 и 225
e) 108 и 240 **f)** 385 и 396

2 Найдите НОД чисел.

a) 28, 63 и 91 **b)** 60, 75 и 100
c) 14, 36 и 175 **d)** 70, 210 и 350

СРЕДНИЙ УРОВЕНЬ

3 Найдите наибольшее число, которое является делителем чисел 54 и 180.

4 Найдите наибольшее натуральное число, на которое делятся числа 77, 110 и 242.

5 Два числа разложены на простые множители: $2^3 \times 3^3 \times 5^2 \times 7$ и $2 \times 3^4 \times 7^3 \times 13$. Найдите наибольшее натуральное число, на которое делятся данные числа.

6 Две проволоки, длины которых равны 72 cm и 96 cm, разделены на равные части. Найдите наибольшую возможную длину каждой части.

7 Металлический лист прямоугольной формы с измерениями 360 cm и 280 cm разделён на равные квадраты.

a) Найдите сторону каждого квадрата.
b) Определите количество квадратов.

8 Сардор хочет разложить 132 плитки белого и 154 плитки чёрного шоколада по коробкам. В каждую коробку он положил равное количество шоколада каждого вида.

a) Найдите наибольшее возможное число коробок.
b) Сколько плиток шоколада каждого вида в одной коробке?

9 В магазине объём продаж калькуляторов одной и той же модели в течение 3 дней составил соответственно 1 800 000 сумов, 4 140 000 сумов и 3 060 000 сумов.

a) Найдите максимальную цену калькулятора.
b) Найдите общее число калькуляторов, проданных по этой цене за 3 дня.

10 Хаким района распорядился раздать семьям, проживающим в районе, 420 kg риса, 168 бутылок масла и 504 kg сахара в равных количествах.

a) Найдите наибольшее возможное число семей, получивших продукты.
b) Можно ли этим семьям поровну раздать 250 упаковок молока? Если нельзя, то сколько ещё упаковок молока потребуется, чтобы распределить поровну молоко между получившимся числом семей?

ВЫСОКИЙ УРОВЕНЬ

11 Найдите два составных числа, НОД которых равен 1.

12 открытое Найдите два разных натуральных числа, меньших 100, НОД которых равен 18.

13 Задуманное число имеет 8 делителей. Два из них – это 4 и 6. Найдите задуманное число.

14 открытое Найдите 3 таких числа, чтобы НОД каждой пары был больше 1, но НОД трёх чисел был равен 1. Например, числа 6, 10 и 15 удовлетворяют данному условию.

15 открытое В коробках находится одинаковое количество ручек. В магазине за два дня было продано 1518 и 2254 ручек соответственно. Определите количество ручек, которое могло быть в коробке при условии, что все ручки из открытых коробок продавались в тот же день. Приведите два возможных случая.

16 Произведение двух чисел равно 8820, их НОД равен 42. Найдите наибольшее из этих чисел.

17 Найдите такое наибольшее число, при делении на которое у чисел 171, 255 и 304 остатки будут равными.

1.3 НАИМЕНЬШЕЕ ОБЩЕЕ КРАТНОЕ (НОК)

Запишем первые 10 кратных для чисел 4 и 6.

Числа, кратные 4: 4, 8, **12**, 16, 20, **24**, 28, 32, **36**, 40

Числа, кратные 6: 6, **12**, 18, **24**, 30, **36**, 42, 48, 54, 60

Мы можем увидеть, что числа 12, 24 и 36 являются **общими кратными** чисел 4 и 6. Наименьшее из этих кратных – число 12.

Значит, **наименьшее общее кратное чисел (НОК)** 4 и 6 – число 12.

Наименьшее общее кратное (НОК) двух или нескольких натуральных чисел является наименьшим из общих кратных этих чисел.

Теперь найдём наименьшее общее кратное чисел 24 и 90. Для этого запишем кратные этих чисел.

Числа, кратные 24: 24, 48, 72, 96, 120, 144, 168, 192, 216, 240, 264, 288, 312, 336, **360**, ...

Числа, кратные 90: 90, 180, 270, **360**, ...

Но это очень скучная работа. Вместо этого используем удобный и простой способ вычисления НОК этих двух чисел, как показано в **примере 8**.

8 ПРИМЕР

Найдите наименьшее общее кратное чисел 24 и 90.

РЕШЕНИЕ

Способ 1. Разложение на простые множители

Каждое число запишем в виде произведения простых множителей.

$24 = 2^3 \times 3$

$90 = 2 \times 3^2 \times 5$

Процесс нахождения всех множителей для определения НОК можно представить наглядно следующим образом:

24	=	2	×	2	×	2	×	3				
90	=	2					×	3	×	3	×	5
НОК	=	2	×	2	×	2	×	3	×	3	×	5

$\therefore$ НОК $= 2^3 \times 3^2 \times 5$
$= 360$

2^3 имеет большую степень, чем 2. 3^2 имеет большую степень, чем 3.

Памятка Для вычисления НОК нескольких чисел надо умножить наибольшие степени каждого простого делителя.

КЛЮЧЕВЫЕ ТЕРМИНЫ

- общие кратные
- наименьшее общее кратное (НОК)

ОБСУДИТЕ

Почему для двух или нескольких чисел находится не наибольшее общее кратное, а наименьшее?

ВСПОМНИТЕ

Для сложения и вычитания обыкновенных дробей мы приводили их к общему знаменателю. Для нахождения общего знаменателя понятие НОК используется следующим образом:

$\frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{3}{12} + \frac{2}{12} = \frac{5}{12}$.

НОК чисел 4 и 6 равно 12.

Способ 2. Способ краткого деления

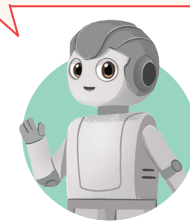
Разделим на общие делители.

90	24	2	Каждый делитель – это общий простой делитель чисел 24 и 90.
45	12	3	
15	4		← Нет общих делителей.

НОК = это произведение простых делителей и остальных делителей
$= 2 \times 3 \times 4 \times 15$
$= 360$

РАВНОСИЛЬНОСТЬ ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

$24 = 2^3 \times 3$
$90 = 2 \times 3^2 \times 5$
Разложив числа 24 и 90 на множители, мы можем легко найти НОК этих чисел.



8 ПРОВЕРЬТЕ СЕБЯ

a) Вычислите НОК чисел 40 и 150, используя разложение на простые множители.

b) Вычислите НОК чисел 63 и 147, используя способ краткого деления.

9 ПРИМЕР

Найдите НОК чисел 20, 24 и 70.

РЕШЕНИЕ

Способ 1. Разложение на простые множители

$20 = 2^2 \times 5$
$24 = 2^3 \times 3$
$70 = 2 \times 5 \times 7$
НОК $= 2^3 \times 3 \times 5 \times 7$
$= 840$

Записав делители данных чисел так, как показано в примере, мы легко можем выбрать наибольшую степень каждого простого делителя.

Способ 2. Способ краткого деления

Выполним деление, используя общие простые делители не менее чем для двух чисел из данных трёх. Если одно из чисел не делится на делитель, то перенесём его на следующую строку.

20	24	70	2	Общие простые делители (должно быть не менее трёх чисел)
10	12	35	2	
5	6	35	5	
1	6	7		

← Число 35 не делится на 2. Поэтому перенесём его на следующую строку.
← 6 не делится на 5. Поэтому перенесём его на следующую строку.
← Продолжим этот процесс до тех пор, пока общих делителей не останется.

НОК $= 2 \times 2 \times 5 \times 6 \times 7$
$= 840$



ПОДУМАЙТЕ

Мы вычислили НОК чисел 20, 24 и 70 – это 840.

a) Будет ли НОК каких-либо двух из этих трёх чисел равным 840?

b) НОК этих двух чисел больше 840? Обоснуйте свой ответ.

9 ПРОВЕРЬТЕ СЕБЯ

a) Найдите НОК чисел 54, 84 и 110.

b) Даны числа: $(2 \times 3 \times 7^2)$, $(2^2 \times 11)$ и 3. Найдите НОК чисел, записав ответ в виде степени.

10 ПРИМЕР

Найдите НОК чисел 26 и 99.

РЕШЕНИЕ

$26 = 2 \times 13$

$99 = 3^2 \times 11$

$\therefore$ НОК $= 2 \times 3^2 \times 11 \times 13$

$= 2574$

ОБРАТИТЕ ВНИМАНИЕ!

НОК чисел 26 и 99 равно 2574, т. е. 26×99. Используя разложение на простые множители в **примере 10,** определим, что НОД чисел 26 и 99 равен 1, т. е. эти числа взаимно простые.

Значит, если два числа взаимно простые, то их НОК будет равно произведению этих чисел.

10 ПРОВЕРЬТЕ СЕБЯ

a) Найдите НОК чисел 34 и 57.

b) Произведение двух чисел равно НОК этих чисел. Найдите сумму данных чисел, если их НОК равно 30. Рассмотрите все варианты.

11 ПРИМЕР

Длина окружности переднего колеса трёхколёсного велосипеда и длины окружностей двух задних колёс равны 60 cm и 45 cm соответственно. Ботир едет на велосипеде по прямой. Переднее колесо касается земли в точке P, а заднее колесо – в точке Q.



a) Какое расстояние должно быть пройдено после начала движения, чтобы точки P и Q снова коснулись земли одновременно?

b) Сколько оборотов сделают переднее колесо и задние колёса за это расстояние?

АНАЛИЗ

Точка P коснётся земли в следующий раз, когда переднее колесо сделает один полный оборот, т. е. когда велосипед пройдёт 60 cm. А точка Q коснётся земли в следующий раз, когда заднее колесо сделает один полный оборот, т. е. когда велосипед пройдёт 45 cm.

Следовательно, точки P и Q одновременно коснутся земли, когда колёса пройдут расстояние, равное НОК длин окружностей этих колёс, т.е. 45 и 60.

РЕШЕНИЕ

a) $60 = 2^2 \times 3 \times 5$

$45 = 3^2 \times 5$

$\therefore \text{НОК} = 2^2 \times 3^2 \times 5$

$= 180$

Пройденное расстояние равно 180 cm.

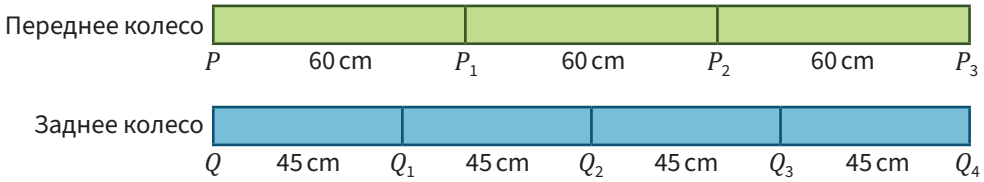
b) $180 \div 60 = 3$

Переднее колесо сделало 3 оборота.

$180 \div 45 = 4$

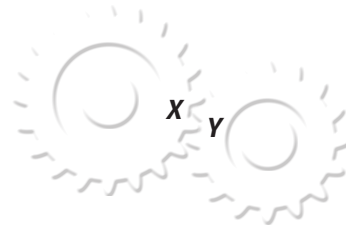
Задние колёса сделали 4 оборота.

Расстояние, пройденное колёсами в горизонтальном положении, можно изобразить следующим образом.



11 ПРОВЕРЬТЕ СЕБЯ

Число зубьев большого и маленького колеса равно 20 и 16 штук соответственно. До начала вращения зуб X на большом колесе совмещён с зубом Y на меньшем колесе.



a) Сколько раз после начала вращения зубья двух колёс соприкоснутся друг с другом, прежде чем зубья X и Y вернутся в исходное положение?

b) Найдите число оборотов каждого колеса до соприкосновения зубьев X и Y.

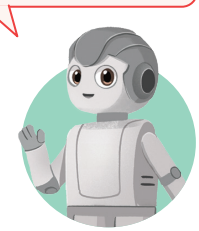
12 ПРИМЕР

Измерения прямоугольной плитки равны 40 cm и 35 cm. Жасур взял несколько таких плиток, чтобы построить квадрат. Найдите площадь наименьшего квадрата.

ЧЕРТЕЖИ

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Для решения задачи удобно начертить прямоугольник и квадрат.



АНАЛИЗ

Чтобы изобразить квадрат, используйте чертёж. Розовая сторона квадрата кратна 40. Синяя сторона квадрата кратна 35. Так как стороны квадрата имеют равную длину, то эта длина должна быть общим кратным чисел 35 и 40.

Вычисление площади наименьшего квадрата – это то же, что и вычисление площади квадрата с наименьшей стороной.

Таким образом, мы должны вычислить наименьшее общее кратное чисел 40 и 35.

РЕШЕНИЕ

$40 = 2^3 \times 5$

$35 = 5 \times 7$

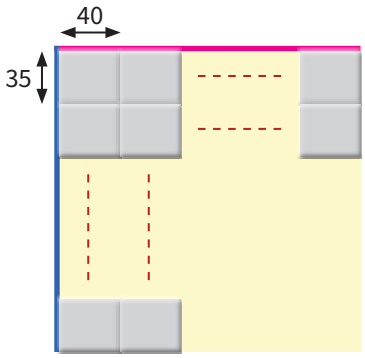
Длина наименьшей стороны $= НОК\ (40; 35)$

$= 2^3 \times 5 \times 7$

$= 280$

Площадь наименьшего квадрата $= 280 \times 280$

$= 78\,400\ см^2$



ПОДУМАЙТЕ

Сможет ли Жасур построить ещё один квадрат из **примера 12**, если использовать вдвое больше плиток?

12 ПРОВЕРЬТЕ СЕБЯ

Измерения прямоугольного стола равны 63 cm и 36 cm. Взяли несколько таких столов, чтобы получить большой стол квадратной формы.

a) Найдите наименьшее значение стороны квадратного стола.

b) Сколько всего потребуется столов для получения большого квадратного стола?

1.3 ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ

НАЧАЛЬНЫЙ УРОВЕНЬ

1 Найдите НОК чисел.

a) 12 и 15 **b)** 6 и 28

c) 23 и 32 **d)** 60 и 75

e) 59 и 118 **f)** 65 и 91

2 Найдите НОК чисел.

a) 9, 12 и 30 **b)** 13, 14 и 15

c) 28, 42 и 105 **d)** 22, 132 и 253

СРЕДНИЙ УРОВЕНЬ

3 Даны два числа в виде произведения степеней: $2^4 \times 3^5 \times 5^3 \times 7^2$ и $2^3 \times 3^6 \times 5 \times 7^8$.

a) Найдите НОД этих чисел.

b) Найдите НОК этих чисел, выразив ответ в виде произведения степеней.

4 У Дурдоны урок музыки проходит один раз в 6 дней, урок плавания – один раз в 4 дня, а урок балета – один раз в 8 дней. 1 апреля все три урока совпали. На какой день апреля снова придутся все три урока одновременно?

5 На новогодней ёлке красная гирлянда мигает один раз в 10 секунд, а синяя – один раз в 15 секунд. В данный момент обе гирлянды мигнули одновременно. Через сколько секунд они снова мигнут одновременно?

6 Запустили два дрона, летающих по кругу. Полный оборот дроны совершают за 48 и 56 секунд соответственно. Их запустили из одной точки, но на разной высоте, в одно и то же время и в одном направлении.

a) Сколько потребуется времени, чтобы дроны оказались в исходной точке?

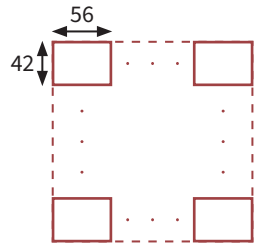
b) Сколько кругов сделает каждый дрон?

7 Толщина учебника «Биология» равна 20 mm, а толщина учебника «Математика» равна 28 mm. Учебники каждого вида сложены в отдельные стопки.

a) Какой будет высота каждой стопки, если обе стопки станут одинаковыми по высоте?

b) Определите количество книг в каждой стопке.

8 Прямоугольные столы в классе имеют измерения 56 cm и 42 cm. Для выполнения задания объединили несколько столов так, чтобы получился стол квадратной формы.



a) Найдите наименьшее значение длины квадратного стола.

b) Определите число рядов, чтобы получить большой квадратный стол.

9 Автобусы A, B и C приезжают на остановку каждые 20, 30 и 45 минут соответственно. Они одновременно встретились на остановке в 08:30. Когда автобусы встретятся в следующий раз?

ВЫСОКИЙ УРОВЕНЬ

10 открытое Найдите две пары чисел, НОК которых равно 24.

11 открытое Найдите две пары чисел, если НОД и НОК этих чисел равны 21 и 630 соответственно.

12 Найдите наибольшее трёхзначное число, которое одновременно делится на 15, 20 и 24.

13 Найдите наименьшее положительное число, которое нужно прибавить к числу 1628, чтобы полученная сумма делилась на 4, 5 и 16.

14 Даны натуральные числа m и n. Их НОД равен p, а НОК равно q. Какая связь между $m \times n$ и $p \times q$? Для решения этой задачи вспомните вычисление НОД и НОК двух чисел.

15 В корзине n яблок. Если это число яблок разделить на 3, то останется 2 штуки, а если разделить на 5, то останется 4 штуки. Каково наименьшее значение n? Обоснуйте свой ответ.

Совет: Какая связь между 2 и 3? А между 4 и 5? Каково будет решение, если яблок $(n + 1)$?

1.4 КВАДРАТНЫЙ КОРЕНЬ И КУБИЧЕСКИЙ КОРЕНЬ

A Квадратный корень

Числа можно записать в виде степени: $3 \times 3 = 3^2$. Выражение 3^2 читается: «3 в квадрате». Так как $3^2 = 9$, то число 9 называется **квадратом** 3, а число 3 – **арифметическим квадратным корнем** из 9 и записывается в виде $\sqrt{9} = 3$.

Таким образом,

$2^2 = 2 \times 2 = 4$ и $\sqrt{4} = \sqrt{2^2} = 2$

$4^2 = 4 \times 4 = 16$ и $\sqrt{16} = \sqrt{4^2} = 4$

$5^2 = 5 \times 5 = 25$ и $\sqrt{25} = \sqrt{5^2} = 5$

Числа **1**, **4**, **9**, **16**, **25**, ... называются **квадратными числами** или **полными квадратами.** Используя разложение на простые множители, можно вычислить квадратный корень полного квадрата.

Число, квадратный корень из которого является натуральным числом, называется полным квадратом.

КЛЮЧЕВЫЕ ТЕРМИНЫ

- квадрат
- арифметический квадратный корень
- квадрат числа
- полный квадрат
- куб
- кубический корень
- полный куб
- куб числа

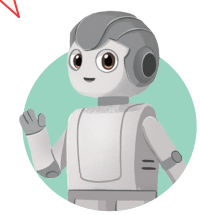
ОБОЗНАЧЕНИЯ

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

$\sqrt{\ }$ – обозначение квадратного корня. $\sqrt{9}$ означает: квадратный корень из 9.

$\sqrt{9} = 3$.

Чему равен $\sqrt{64}$?



13 ПРИМЕР

Запишите число 144 в виде произведения простых множителей. Вычислите $\sqrt{144}$.

АНАЛИЗ

144 – полный квадрат. Запишем его в виде произведения двух одинаковых чисел или в виде произведения двух групп с одинаковыми простыми множителями.

РЕШЕНИЕ

Запишем 144 в виде произведения простых множителей.

$144 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3$

$= 2^4 \times 3^2$

Разложим простые множители на две одинаковые группы.

$144 = (2 \times 2 \times 3) \times (2 \times 2 \times 3)$

$= (2^2 \times 3) \times (2^2 \times 3)$

$= (2^2 \times 3)^2$

Правая сторона равенства является квадратом числа.

$\square \times \square = \square^2$

Здесь, $\square = 2^2 \times 3$.

$\therefore \sqrt{144} = \sqrt{(2^2 \times 3)^2}$

$= 2^2 \times 3$

$= 12$

Вычислим квадратный корень.

ВСПОМНИТЕ

Для произвольного натурального числа n выполняется равенство: $\sqrt{n^2} = n$.

ОБРАТИТЕ ВНИМАНИЕ!

Квадратный корень числа можно вычислить на калькуляторе с помощью нажатия кнопки $\sqrt{\ }$.

ПОДУМАЙТЕ

Обратите внимание на степени простых множителей и квадратный корень из числа 144. Что вы можете сказать о степенях каждого простого множителя и квадратном корне полного квадрата?

13 ПРОВЕРЬТЕ СЕБЯ

Запишите число 484 в виде произведения степеней простых множителей.

Вычислите $\sqrt{484}$.

ОБСУДИТЕ

Дано число $n = 2^6 \times 5^4 \times 7^3$. Будет ли число n полным квадратом? Обоснуйте свой ответ.

14 ПРИМЕР

Площадь квадрата равна 1521 cm^2. Найдите длину стороны квадрата, используя разложение числа на простые множители.

РЕШЕНИЕ

Разложим число на простые множители: $1521 = 3 \times 3 \times 13 \times 13$.

Площадь квадрата = сторона × сторона.

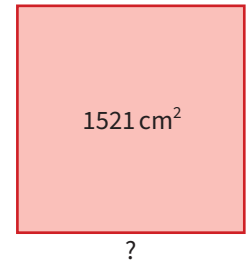
Сторона $= \sqrt{\text{площади}}$

$= \sqrt{3 \times 3 \times 13 \times 13}$

$= \sqrt{(3 \times 13)^2}$

$= 3 \times 13$

$= 39$ cm



Длина стороны квадрата равна 39 cm.

ОБСУДИТЕ

Достаточно ли проверить делимость числа на простые числа, меньшие квадратного корня из этого числа, чтобы определить, является ли оно простым? Обоснуйте свой ответ.

14 ПРОВЕРЬТЕ СЕБЯ

Площадь квадрата равна 7225 cm^2. Найдите длину стороны квадрата, используя разложение числа на простые множители.

15 ПРИМЕР

n – такое число, при котором $40 \times n$ – полный квадрат. Найдите наименьшее натуральное значение n.

АНАЛИЗ

Для того чтобы выражение $40 \times n$ было полным квадратом, число n может быть равным 40. То есть (40 x 40) будет полным квадратом. Кроме того, есть и другие значения n, при которых число $(40 \times n)$ также будет полным квадратом.

Например, $40 \times \mathbf{n} = 40 \times \mathbf{40 \times 2 \times 2}$
$= (40 \times 2) \times (40 \times 2)$.

Наименьшее значение n – это 40? Как можно это определить?
Для этого нужно число 40 разложить на простые множители. Но разложить на простые множители число n мы не можем.

РЕШЕНИЕ

$40 \times n = 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times n$
$= 2 \times 2 \times 5 \times 2 \times n$
$= (2 \times 2 \times 5) \times (2 \times n)$

Так как $40 \times n$ – полный квадрат, то для нахождения наименьшего натурального значения n выражения $(2 \times 2 \times 5)$ и $(2 \times n)$ должны быть равны.

$40 \times \mathbf{n} = (2 \times 2 \times 5) \times (2 \times \mathbf{2 \times 5})$
$\therefore n = 2 \times 5$
$= 10$

Наименьшее натуральное значение n равно 10.

ПОДУМАЙТЕ

1. Есть ли ещё такие значения числа n, при которых выражение $40 \times n$ будет полным квадратом?
2. Вы уверены, что наименьшее значение числа n, при котором выражение $40 \times n$ будет полным квадратом, равно 2×5?

15 ПРОВЕРЬТЕ СЕБЯ

Найдите наименьшее натуральное значение числа k, при котором выражение $24 \times k$ будет полным квадратом.

B Кубические корни

$2 \times 2 \times 2 = 2^3$ мы можем записать в виде степени. Выражение 2^3 читается: «2 в кубе». Так как $2^3 = 8$, то число 8 называется **кубом** 2, а число 2 – **кубическим корнем** из 8 и записывается в виде $\sqrt[3]{8} = 2$.

Таким образом,

$1^3 = 1 \times 1 \times 1 = 1$ и $\sqrt[3]{1} = \sqrt[3]{1^3} = 1$

$3^3 = 3 \times 3 \times 3 = 27$ и $\sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{3^3} = 3$

$4^3 = 4 \times 4 \times 4 = 64$ и $\sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{4^3} = 4$

Числа **1**, **8**, **27**, **64**, ... называются **полными кубами** или **кубическими числами**. Разложив полный куб на простые множители, мы можем вычислить его кубический корень.

Число, кубический корень которого является натуральным числом, называется полным кубом.

16 ПРИМЕР

Вычислите кубический корень из числа 216, разложив его на простые множители.

РЕШЕНИЕ

Разложим число 216 на простые множители.

$216 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3$
$= 2^3 \times 3^3$

Разделим простые множители на 3 одинаковые группы.

$216 = (2 \times 3) \times (2 \times 3) \times (2 \times 3)$
$= (2 \times 3)^3$

Правую часть равенства запишем в виде куба числа.

□ × □ × □ = □^{3}

Здесь, □ = 2×3.

$\therefore \sqrt[3]{216} = \sqrt[3]{(2 \times 3)^3}$
$= 2 \times 3$
$= 6$

Получим кубический корень.

16 ПРОВЕРЬТЕ СЕБЯ

Вычислите кубический корень из числа 1728, используя разложение числа на простые множители.

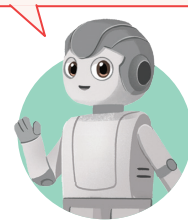
ВСПОМНИТЕ

Для произвольного натурального числа n верно равенство: $\sqrt[3]{n^3} = n$.

ОБОЗНАЧЕНИЯ

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

«$\sqrt[3]{\ }$» – является знаком кубического корня. Число 3 используется для обозначения кубического корня. Для записи кубического корня из 8 используем краткую запись: $\sqrt[3]{8}$. Как вычисляется кубический корень из 1000?



ОБРАТИТЕ ВНИМАНИЕ!

Для вычисления кубического корня на калькуляторе используется кнопка □. В некоторых случаях сначала нажимается кнопка SHIFT.

ПОДУМАЙТЕ

Дано число, разложенное на простые множители: $2^6 \times 3^{12} \times 5^{36}$.

a) Будет ли это число полным кубом? Почему?
b) Будет ли это число полным квадратом? Почему?
c) Что вы можете сказать о степенях простых множителей чисел, которые являются одновременно и полными квадратами и полными кубами?

17 ПРИМЕР

Найдите наименьшее натуральное значение m, при котором выражение $540 \times m$ будет полным кубом.

АНАЛИЗ

Для того чтобы вычислить наименьшее значение m, выразим число 540 в виде произведения простых множителей так, чтобы в выражении $540 \times m$ было три одинаковые группы простых чисел.

РЕШЕНИЕ

$540 = 2^2 \times 3^3 \times 5$

$540 \times m = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5 \times m$
$= (2 \times 3 \times 5) \times (2 \times 3 \times 3 \times m)$

Отсюда мы можем найти наименьшее натуральное значение m:
$2 \times 3 \times 3 \times m = (2 \times 3 \times 5) \times (2 \times 3 \times 5)$. Здесь, $540 \times m$ – полный куб.

$\therefore m = 2 \times 5 \times 5$
$= 50$

Наименьшее натуральное значение m равно 50.

ОБСУДИТЕ

Можете ли вы найти наибольшее значение m **в примере 17**? Обоснуйте свой ответ.

ПОДУМАЙТЕ

1. Вы уверены, что при наименьшем значении $m = 2 \times 5 \times 5$ выражение $540 \times m$ будет полным кубом? Обоснуйте свой ответ.
2. Что вы можете сказать о степенях простых множителей выражения $540 \times m$, если $m = 50$?

17 ПРОВЕРЬТЕ СЕБЯ

Найдите наименьшее натуральное значение числа k, при котором значение $600 \times k$ будет полным кубом.

1.4 ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ

НАЧАЛЬНЫЙ УРОВЕНЬ

1 Вычислите квадратные корни из следующих чисел, используя разложение на простые множители.

a) $\sqrt{36}$ **b)** $\sqrt{121}$

c) $\sqrt{196}$ **d)** $\sqrt{256}$

e) $\sqrt{441}$ **f)** $\sqrt{676}$

2 Вычислите кубические корни из следующих чисел, используя разложение на простые множители.

a) $\sqrt[3]{343}$ **b)** $\sqrt[3]{512}$

c) $\sqrt[3]{729}$ **d)** $\sqrt[3]{1331}$

e) $\sqrt[3]{4096}$ **f)** $\sqrt[3]{8000}$

СРЕДНИЙ УРОВЕНЬ

3 Вычислите квадратные корни из чисел, представленных в виде степени.

a) $5^4 \times 7^2$ **b)** $2^6 \times 11^{10}$

4 Вычислите кубические корни из чисел, представленных в виде степени.

a) $2^3 \times 19^6$ **b)** $3^{12} \times 5^9$

5 **a)** Вычислите НОД чисел 63 и 117.

b) Вычислите квадратный корень из ответа пункта **a)**.

6 Вычислите кубический корень из НОК чисел 24 и 108.

7 **a)** Вычислите куб выражения: $2^4 \times 5^2$.

b) Вычислите квадратный корень из ответа пункта **a)**. Ответ представьте в виде степени.

8 **a)** Вычислите квадрат выражения: $7^6 \times 19^3$.

b) Вычислите куб из ответа пункта **a)**. Представьте ответы в виде степени.

ВЫСОКИЙ УРОВЕНЬ

9 Железный лист квадратной формы имеет площадь 7056 cm^2. Найдите длину стороны листа.

10 Объём куба равен 2197 cm^3. Найдите ребро куба.

11 Площадь рамки квадратной формы равна 2601 cm^2. Найдите периметр рамки.

12 **a)** Разложите число 129 600 на простые множители.

b) Во время эксперимента выяснилось, что скорость пули равна $\sqrt{129\,600}$ m/s. Представьте скорость пули в виде степени.

13 Из проволоки сконструировали модель куба. Объём куба равен 10 648 cm^3.

a) Найдите длину ребра куба.

b) Найдите длину использованной проволоки.

14 Число 6 – делитель 5◆32, где ◆ – неизвестная цифра.

a) Найдите все значения ◆.

b) Если 5◆32 – полный куб, то:

1) Найдите значение ◆.

2) Найдите кубический корень этого числа.

c) Запишите все значения ◆5 из пункта **a)**. Какие два общих свойства имеют эти числа?

15 Найдите наименьшее натуральное значение числа n, при котором выражение $2160 \times n$ будет полным квадратом.

16 Найдите наименьшее натуральное значение числа m, при котором выражение $36 \times m$ будет полным кубом.

17 Найдите наибольший полный квадрат среди делителей числа 1575.

18 Найдите наименьшее значение n, при котором $600n$ будет и полным квадратом и полным кубом.

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ИЗ ГЛАВЫ 1

ПРОСТЫЕ И СОСТАВНЫЕ ЧИСЛА

Числа 0, 1, 2, 3, 4, ... можно классифицировать следующим образом:

a) Натуральные числа, большие 1, делятся на простые и составные числа.

b) Простые числа имеют только два делителя, т. е. 1 и само число (например, 2, 3, 5, 7, ...).

c) Составные числа имеют более двух делителей (например, 4, 6, 8, 9, …).

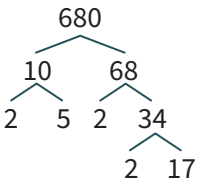
РАЗЛОЖЕНИЕ ЧИСЛА НА ПРОСТЫЕ МНОЖИТЕЛИ

Разложение числа на простые множители – это выражение составного числа в виде произведения только простых множителей.

Например,

Запишите число 680 в виде произведения степеней простых множителей.

Способ 1. Дерево множителей



$680 = 2 \times 5 \times 2 \times 2 \times 17$

$= 2^3 \times 5 \times 17$

Способ 2. Краткое деление

680	2
340	2
170	2
85	5
17	17
1	1

$680 = 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 17$

$= 2^3 \times 5 \times 17$

НАИБОЛЬШИЙ ОБЩИЙ ДЕЛИТЕЛЬ И НАИМЕНЬШЕЕ ОБЩЕЕ КРАТНОЕ

Мы можем найти наибольший общий делитель (НОД) и наименьшее общее кратное (НОК) двух или нескольких чисел, используя разложение числа на простые множители.

НОД

Найдите НОД чисел 700 и 840.

$700 = 2^2 \times 5^2 \times 7$

$840 = 2^3 \times 3 \times 5 \times 7$

$НОД = 2^2 \times 5 \times 7$

$= 140$

Умножьте общие простые множители с наименьшими степенями.

НОК

Найдите НОК чисел 700 и 840.

$700 = 2^2 \times 5^2 \times 7$

$840 = 2^3 \times 3 \times 5 \times 7$

$НОК = 2^3 \times 3 \times 5^2 \times 7$

$= 4200$

Умножьте все простые множители с наибольшими степенями.

КВАДРАТ И КВАДРАТНЫЙ КОРЕНЬ ЧИСЛА

3 в квадрате $= 3^2$

$= 9$

Квадратный корень из 9 $= \sqrt{9}$

$= \sqrt{3^2}$

$= 3$

Числа, квадратные корни которых являются натуральными числами, называются полными квадратами (например, 1, 4, 9, 16, 25, …).

Дано разложение числа на простые множители: $2^6 \times 3^4 \times 5^{12}$. Будет ли оно полным квадратом?

КУБ И КУБИЧЕСКИЙ КОРЕНЬ ЧИСЛА

5 в кубе $= 5^3$

$= 125$

Кубический корень из 125 $= \sqrt[3]{125}$

$= \sqrt[3]{5^3}$

$= 5$

Числа, кубические корни которых являются натуральными числами, называются полными кубами (например, 1, 8, 27, 64, 125, ...).

Дано разложение числа на простые множители: $7^{12} \times 13^9 \times 19^3$. Будет ли оно полным кубом?

ПОВТОРЕНИЕ ГЛАВЫ 1

1 Найдите наименьшее число, простыми делителями которого являются 2, 5 и 7.

2 Определите, какими являются числа: простыми или составными.

a) 649 **b)** 721

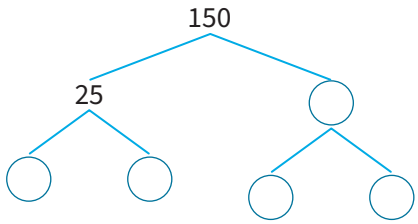
3 Проверьте, истинны или ложны следующие высказывания.

a) Если 3 и 5 являются делителями некоторого числа, то и 15 будет делителем этого числа.

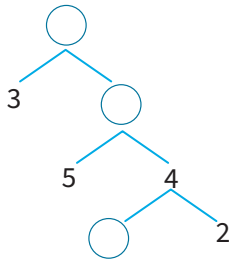
b) Если 246 – кратное некоторого числа, то и 123 будет кратным данного числа.

4 **a)** Заполните дерево множителей.

1)



2)



b) Числа на вершине каждого дерева выразите в виде произведения степеней простых множителей.

c) Найдите НОД чисел, найденных в пункте **b)**.

d) Найдите НОК чисел, найденных в пункте **b)**.

5 Даны числа: 12, 40 и 45.

a) Найдите НОД этих чисел.

b) Найдите НОК этих чисел.

c) Найдите наибольшее 4-значное число, являющееся общим кратным этих чисел.

6 **a)** Запишите следующие числа в виде произведения степеней простых множителей.

1) 12 **2)** 144 **3)** 5040

b) НОД и НОК двух чисел равны 12 и 5040 соответственно. Найдите второе число, если первое число равно 144.

7 **a)** Запишите число 240 в виде произведения простых множителей.

b) Найдите НОД чисел 75 и 240.

c) В коробке находится 240 конфет. В контейнере – 75 кексов. Камила купила равное число конфет и кексов. Какое наименьшее число коробок конфет она могла купить?

8 Произведение двух чисел равно 3388, а их НОД равен 11. Найдите все пары чисел, удовлетворяющие этим условиям.

9 Измерения прямоугольника: $(2^5 \times 7)$ cm и $(2 \times 5^2 \times 7^3)$ cm.

a) Найдите площадь прямоугольника с помощью разложения числа на простые множители.

b) Площадь квадрата равна площади этого прямоугольника. Найдите сторону квадрата.

10 **a)** Запишите 375 в виде произведения степеней простых множителей.

b) Площадь квадрата равна $(375 \times n)$ cm^2, где n – натуральное число. Найдите наименьшее значение n.

11 **a)** Вычислите, используя разложение числа на простые множители.

1) $\sqrt{2601}$

2) $\sqrt[3]{375 \times 243}$

b) Найдите НОД чисел, найденных в пункте **a)**.

12 Произведение трёх последовательных чисел равно 1716. Найдите сумму этих чисел.
Совет: Используйте разложение числа на простые множители.

13 Число имеет 12 делителей, три из которых – это 3, 4 и 5. Найдите остальные 9 делителей.

14 Найдите наименьшее 4-значное число, кратное всем числам от 1 до 10. Обоснуйте свой ответ.

15



На рисунке изображено большое колесо обозрения, в котором можно разместить 784 человека. Число кабин равно вместимости одной кабины.

a) Запишите число 784 в виде произведения степеней простых множителей.

b) Найдите общее число кабин.

16 Ахмад, Ботир и Камила ходят в кафе каждый 6-й, 8-й и 15-й день месяца. Они пошли в кафе 1 января 2025 года. Когда в следующий раз они снова встретятся в кафе?

17 В коробке три вида шоколадных конфет. Из них с миндалём – 18 штук, с арахисом – 24 штуки, с кешью – 30 штук. Все конфеты раздали детям поровну. Каждый ребёнок получил по три вида конфет в равном количестве. Если каждый получил наибольшее возможное число конфет, то:

a) сколько конфет получил каждый ребёнок?

b) сколько детей получили конфеты с кешью?

18 Первый колокол звонит каждые 25 минут, а второй – каждые полчаса. Первый колокол прозвенел в 05:50, а второй – в 06:00.

a) Когда колокола зазвонят одновременно?

b) Сколько раз колокола будут звонить одновременно до 18:00?

19 Бумага прямоугольной формы имеет измерения 315 cm и 99 cm. Её разделили на несколько равных квадратов. Сторона каждого квадрата – целое число.

a) Найдите наибольшее значение стороны каждого квадрата.

b) Найдите другое наибольшее значение стороны квадрата.

c) Имеются ли другие значения стороны квадрата? Обоснуйте свой ответ.

20 Нескольким учащимся хотят поровну раздать фрукты. Если фрукты разделить между 4 учащимися, то останется 2 фрукта. Если разделить между 6, то останется 4 фрукта. Если разделить между 15, то останется 13 фруктов. Найдите точное количество фруктов, если их приблизительное количество – 120 штук.

ПРОБЛЕМНОЕ ЗАДАНИЕ

Какие из шкафчиков открыты?

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

На рисунке изображены закрытые шкафчики, пронумерованные от 1 до 100. Перед шкафчиками стоят 100 учащихся.

- 1-й учащийся открыл все 100 шкафчиков.
- 2-й учащийся закрыл шкафчики, кратные 2.
- 3-й учащийся закрыл все шкафчики, кратные 3, и открыл закрытые.

Процесс продолжился таким образом для всех 100 учащихся.
Какие шкафчики в итоге останутся открытыми?
Для решения этой задачи воспользуйтесь 4-этапным алгоритмом.

Этап 1 **Понимание условия задачи**

- Объясните условие задачи своими словами.
- Определите цель.

Этап 2 **Составление плана**

Придумайте случай проще, например, 3 учащихся и 3 шкафчика.
Первоначально шкафчики были закрыты.
Шкафчики в конце будут либо открытыми, либо закрытыми.
Необходимо определить фактор, определяющий последнее состояние.
Когда найдёте ответ в случае с 3 шкафчиками, рассмотрите случай сложнее, например, с 5 учащимися и 5 шкафчиками.

Учащийся \ Шкафчик	1	2	3
Учащийся 1	О	О	О
Учащийся 2	О	З	О
Учащийся 3			

О: открыто
З: закрыто

Этап 3 **Реализация плана**

- Начните открывать 3 шкафчика (или 5 шкафчиков). Какие шкафчики открыты, а какие закрыты?
- Какой фактор определяет последнее состояние шкафчиков?
- Каков будет ответ в случае 100 шкафчиков?

Этап 4 **Повторное рассмотрение (проверка)**

- Проверьте правильность ответа.
- Будет ли верным ваш способ решения в случае 1000 учащихся и 1000 шкафчиков?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

1. Запишите этапы разложения числа на простые множители для вычисления НОД и НОК двух чисел. Подтвердите свой ответ примерами.
2. Приведите один пример из повседневной жизни, где используется НОД и НОК.



ГЛАВА 2

Действительные числа

2.1 Понятие отрицательных чисел и числовой оси

2.2 Сложение и вычитание целых чисел

2.3 Умножение и деление целых чисел. Выполнение действий над целыми числами

2.4 Рациональные, иррациональные и действительные числа

2.5 Действия над действительными числами

Плотность атмосферы планеты Марс в 100 раз меньше плотности атмосферы планеты Земля. Низкая плотность атмосферы Марса не может удерживать тепло, идущее от Солнца, и поэтому на планете наблюдаются резкие перепады дневной и ночной температур.

В некоторых местах по экватору планеты температура днём составляет +20 °C, но ночью этот показатель может опускаться до –50 °C.

Чему равна разность этих температур?

В этой главе мы изучим:

- отрицательные числа и их применение в повседневной жизни;
- положительные и отрицательные числа на числовой оси;
- рациональные, иррациональные и действительные числа;
- четыре действия над действительными числами (в том числе и на калькуляторе).

2.1 ПОНЯТИЕ ОТРИЦАТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ И ЧИСЛОВОЙ ОСИ

A Отрицательные числа



КЛЮЧЕВЫЕ ТЕРМИНЫ

- положительные числа
- целые числа
- отрицательные числа
- числовая ось
- знаки неравенства

В повседневной жизни мы часто сталкиваемся с числами со знаками плюс (+) или минус (–). Мы используем их для обозначения величин, имеющих противоположное направление или значение. Например, мы используем выражение «+40 °C», чтобы показать, что температура воздуха на сорок градусов выше нуля, или выражение «–40 °C», чтобы показать, что температура воздуха на сорок градусов ниже нуля. Мы читаем «+40 °C» как «плюс 40 градусов Цельсия», а «–40 °C» как «минус 40 градусов Цельсия».

АКТИВИЗИРУЮЩЕЕ ЗАДАНИЕ 1

Цель: поиск применения отрицательных чисел в повседневной жизни. Поищите примеры использования отрицательных чисел вокруг вас или в Интернете. В каких случаях используются эти числа? Обсудите с одноклассниками значение знака минус (–) в каждом примере.

С помощью **активизирующего задания 1** мы определили, как отрицательные числа используются в повседневной жизни.

Натуральные числа также можно назвать **положительными целыми числами**. Если перед натуральными числами поставить знак минус (–), то получатся **отрицательные целые числа**. При записи положительных чисел знак плюс (+) можно не писать.

Положительные целые числа: 1, 2, 3, 4, ...
Отрицательные целые числа: −1, −2, −3, −4, ...

Множество положительных целых чисел, отрицательных целых чисел и ноль называется множеством **целых чисел**.

Целые числа: ... −4, −3, −2 , −1, 0, 1, 2, 3, 4, ...

Положительные числа включают в себя все положительные целые числа, а также все положительные десятичные и обыкновенные дроби. **Отрицательные числа** включают в себя все отрицательные целые числа, а также отрицательные десятичные и обыкновенные дроби.

Положительные числа: $1, 2, \frac{1}{5}, 2\frac{1}{4}, 0{,}3, 1{,}8, \ldots$

Отрицательные числа: $-1, -3, -\frac{1}{5}, -3\frac{3}{8}, -0{,}8, -4{,}6, \ldots$

«–1» читается: «минус 1». Число 0 – не положительное и не отрицательное.

ОБРАТИТЕ ВНИМАНИЕ!

При использовании чисел для подсчёта предметов число 0 означает «ничто». Но в случаях температуры и времени, 0 **используется в качестве контрольной точки.**

Кроме того, GMT+8 означает, что часовой пояс на 8 часов опережает среднее время по Гринвичу (+0 часов), а GMT–4 отстаёт на 4 часа.

ОБРАТИТЕ ВНИМАНИЕ!

Напомним, целые числа состоят из натуральных чисел, нуля и целых отрицательных чисел.

1 ПРИМЕР

Вершина Джомолунгмы (Эвереста) находится на высоте приблизительно 8850 m выше уровня моря, а Мёртвое море – на 430 m ниже уровня моря. Выразите их высоты с помощью положительных и отрицательных чисел.

РЕШЕНИЕ

Значения выше уровня моря – положительные.

Высота вершины Джомолунгмы составляет 8850 m.

Высота Мёртвого моря составляет –430 m.

Так как высота находится ниже уровня моря, она будет отрицательной.

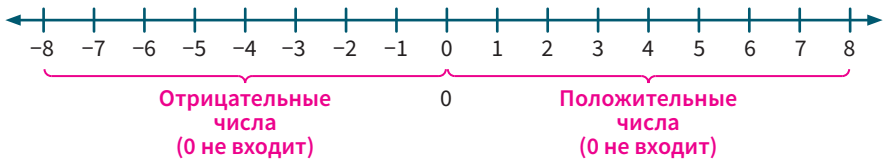
Памятка Для начала определим положительное направление. Если считать, что «выше уровня моря» – понятие положительное, то высота вершины Джомолунгмы – положительное число, а высота Мёртвого моря – отрицательное число.

1 ПРОВЕРЬТЕ СЕБЯ

Самолёт летит на высоте 1320 m выше уровня моря, а подводная лодка плывёт на глубине 56 m ниже уровня моря. Выразите их высоты, используя положительные и отрицательные числа.

В Числовая ось

Для изображения порядка чисел используется числовая прямая. При её построении выбирают единичный отрезок и отмечают числа через равные интервалы. Стрелки на концах прямой показывают, что она продолжается в обоих направлениях бесконечно.



На горизонтальной числовой оси:

- **все положительные числа расположены справа от нуля (0);**
- **все отрицательные числа расположены слева от нуля (0);**
- **все числа расположены слева направо в порядке возрастания;**
- **каждое число меньше числа, которое расположено правее;**
- **каждое число больше числа, которое расположено левее.**

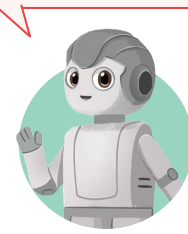
Иногда, для того чтобы показать направление возрастания чисел, стрелку обозначают только с правой стороны.

ИЗМЕРЕНИЯ

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Числа можно использовать для количественной оценки объектов и состояния мира. Например, температура воздуха в городе измеряется для того, чтобы узнать, насколько жарко или холодно на улице. Если мы примем 0 °C в качестве отметки замерзания воды, то отрицательные значения будут указывать на температуру ниже точки замерзания.

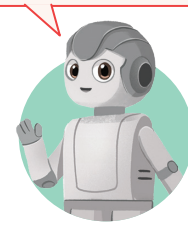
Высота, на которой расположен объект, указывает на то, насколько он высок или низок. Если уровень моря равен 0 m, то отрицательная высота будет ниже уровня моря.



ДИАГРАММЫ

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Числовая ось очень удобна для сравнения чисел. Мы можем определить большее или меньшее число, используя расположение этих чисел на числовой оси.



Дана числовая ось.



Число 3 находится справа от числа –2.
В этом случае говорится: «Число –2 **меньше** числа 3», а выражение записывается в виде $-2 < 3$.

Число –5 находится слева от числа –2.
В этом случае говорится: «Число –2 **больше** числа –5», а выражение записывается в виде $-2 > -5$.

В следующей таблице приведены **знаки неравенств**.

Знаки неравенств	Значение
$<$	Меньше
$>$	Больше
$\leq$	Меньше или равно (не больше)
$\geq$	Больше или равно (не меньше)

2 ПРИМЕР

a) Обозначьте на числовой оси числа: 0; 2,3 и –3.

b) Запишите эти числа в порядке возрастания.

РЕШЕНИЕ

a) На числовой оси обозначим данные числа.



b) На числовой оси можно увидеть, что число 2,3 больше чисел 0 и –3. Таким образом, 2,3 – наибольшее число. Также можем сказать, что число –3 меньше, чем числа 0 и 2,3. То есть –3 – наименьшее число. Значит, в порядке возрастания числа запишем следующим образом: –3; 0 и 2,3.

2 ПРОВЕРЬТЕ СЕБЯ

a) Обозначьте на числовой оси числа: –1; –3,5 и $2\frac{1}{2}$.

b) Запишите эти числа в порядке убывания.

3 ПРИМЕР

В декабре температура на севере Узбекистана может опускаться до –27 °C, а в марте в среднем может составлять –1 °C.

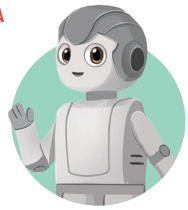
a) Обозначьте числа –27 и –1 на числовой оси.

b) Покажите связь между этими числами с помощью знаков неравенства.

ОБОЗНАЧЕНИЯ

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Вспомните знаки корней $\sqrt{\ }$, $\sqrt[3]{\ }$ и знаки степени из главы 1.
Знаки неравенства $<$, $>$, $\leq$, $\geq$ также выражают связь между математическими объектами. Можете ли вы объяснить разницу между множеством чисел, меньших 4 (< 4) и множеством чисел, меньших или равных 4 (≤ 4)?



ОБРАТИТЕ ВНИМАНИЕ!

Запись чисел **в порядке возрастания** означает запись этих чисел от наименьшего к наибольшему. Запись чисел в порядке убывания означает запись чисел от наибольшего к наименьшему.

ОБСУДИТЕ

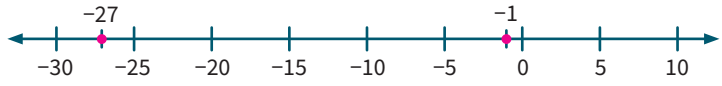
1) Сможете ли вы найти числа, расположенные между 2,3 и –3? Покажите эти числа.

2) Сможете ли вы найти число, расположенное между числом 2,3 и любым из чисел, найденных в пункте **1)**?

3) Всегда ли можно найти некоторое число, расположенное между двумя числами на числовой оси, продолжая таким же образом? Исходя из этого, что вы можете сказать о числах на числовой оси?

РЕШЕНИЕ

a) При обозначении чисел на числовой оси очень важно выбрать единицу измерения (масштаб). В этом задании можем взять 1 cm за 5 единиц.



Температура воздуха (°C)

Температуры –27 °C и –1 °C обозначены на числовой оси так, как показано на рисунке.

b) Так как число –1 расположено справа от числа –27, то оно больше. Это можно записать в виде –1 > –27. В этом случае выражение читается: «Число –1 больше числа –27». Также это можно записать и в виде –27< –1, в этом случае выражение читается: «Число –27 меньше числа –1».

ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Можете ли вы написать программу, записывающую введённые 5 чисел в порядке возрастания?

3 ПРОВЕРЬТЕ СЕБЯ

a) Обозначьте на числовой оси числа: 5, –8 и –17.

b) Установите связь в каждой паре чисел с помощью знаков < или >.
1) 5 и −8 **2)** −17 и 5 **3)** −17 и −8

c) Существует ли число, которое больше –8, но меньше –17? Обоснуйте свой ответ.

2.1 ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ

НАЧАЛЬНЫЙ УРОВЕНЬ

1 Масса тела – положительное число. Запишите изменения массы с помощью положительных и отрицательных чисел.

a) Масса Жавохира в течение месяца увеличилась на 2 kg.

b) С тех пор как Малика начала ходить в фитнес-центр, она сбросила 3 kg.

2 Сумма на банковском счёте – положительное число. Запишите значения денежных переводов, используя положительные и отрицательные числа.

a) Расход: 280 000 сумов.

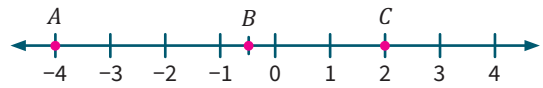
b) Доход: 165 000 сумов.

3 **a)** Что означает +12 km/h, если –4 km/h означает скорость меньше разрешённой скорости на 4 km/h?

b) Что означает +5 km, если –3 km означает расстояние 3 km к северу?

4 Что означает +5 °C, если –7 °C означает, что температура снизилась на 7 градусов?

5 **a)** Определите числа на числовой оси, обозначенные точками A, B и C.



b) Запишите эти три числа в порядке убывания.

6 Изобразите данные числа на числовой оси и запишите связь между ними, используя следующие знаки:

a) Знак **<**

1) 3; −5 **2)** 0; −4,5 **3)** $5; -1\frac{1}{2}$

b) Знак **>**

1) −4; 1 **2)** 0,8; −3,2 **3)** $3\frac{1}{3}; -\frac{7}{2}$

7 Впишите в пустые клетки знак < или >.

a) 0 ☐ −3 **b)** −2,1 ☐ 1,2

c) −15 ☐ 15 **d)** 23 ☐ −24

e) −14 ☐ 12 **f)** −11 ☐ −33

СРЕДНИЙ УРОВЕНЬ

8 Объясните смысл каждой величины.

a) Исправление (корректировка) в почасовой оплате труда рабочего составляет –15 000 сумов.

b) Движение лифта: +2 этажа.

9 Аппарат упаковывает в каждый пакет 1000 g риса. При выборочной проверке массы пакетов надпись «+8» означает 1008 g. Как вы обозначите недостаток массы риса в пакете, если она составляет 996 g?

10 **a)** Обозначьте на числовой оси числа: −2,7; $1\frac{1}{3}$; $-4\frac{3}{4}$; 1 и −0,4.

b) Запишите эти числа в порядке возрастания.

11 **a)** Обозначьте на числовой оси числа: 5; $-3\frac{1}{2}$; −0,9; −3,2 и 0,3.

b) Запишите эти числа в порядке убывания.

12 Запишите числа в порядке возрастания: –50, 210, 0, −160 и −300.

13 Запишите числа в порядке убывания: –22, 4, 7, −15 и −9.

14 В таблице указаны средние ночные температуры в некоторые месяцы в пустыне Гоби.

Январь	Март	Май	Июль	Ноябрь	Декабрь
−20 °C	−10 °C	+9 °C	+18 °C	−9 °C	−15 °C

Запишите последовательность месяцев, учитывая порядок убывания средних ночных температур в пустыне.

15 Даны высоты выше уровня моря некоторых географических точек.

Высочайшая точка Хазрати Султон, Узбекистан: 4643 м;
Турфанская впадина, Китай: –154 м;
гора Фабер, Сингапур: 105 м;
Долина Смерти, США: –86 м.
Запишите эти данные в порядке возрастания.

ВЫСОКИЙ УРОВЕНЬ

16 Ниже показана страница из сберегательной книжки (сумы).

Дата	Доход	Расход	Баланс
03.01.2020	3 000 000		3 000 000
05.01.2020		200 000	2 800 000
11.01.2020	150 000		2 950 000
18.01.2020		400 000	2 550 000

Составьте такую таблицу, в которой в одном столбце под названием «Денежные переводы» будут показаны и доходы, и расходы.

17 У дяди Рахима три продуктовых магазина A, B и C. За день денежный остаток в трёх магазинах составил: –3 250 000 сумов в магазине A; +760 000 сумов в магазине B; –2 180 000 сумов в магазине C. На основании этих данных определите, какой магазин:

a) получил наибольший доход;

b) получил наименьший доход.

18 Двойное неравенство $-9 \le a < 5$ читается: «Число a не меньше –9, но меньше 5». a – целое число.

a) Найдите все значения a.

b) Найдите все значения a, если a – простое число.

19 Шкалу термометра можно считать вертикальной числовой осью.



a) Какую температуру показывает термометр?

b) Температура −18 °C больше или меньше температуры, указанной на термометре?

c) Как определяется наибольшее или наименьшее число на вертикальной числовой оси?

20 Обсудите, существуют ли следующие числа. Если существуют, то запишите их значения.

a) Наибольшее положительное целое число.

b) Наименьшее положительное целое число.

c) Наибольшее отрицательное целое число.

d) Наименьшее отрицательное целое число.

2.2 СЛОЖЕНИЕ И ВЫЧИТАНИЕ ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ

КЛЮЧЕВЫЕ ТЕРМИНЫ

- противоположное число
- сложение целых чисел
- нулевая пара
- вычитание целых чисел

В предыдущей теме мы научились обозначать положительные и отрицательные числа на числовой оси. Эти числа также можно показать, используя алгебраические кнопки. Каждая кнопка имеет две стороны, как показано на рисунке. На одной стороне написано «1», а на другой «–1».



Чтобы показать противоположное число, надо перевернуть кнопки, как показано ниже.



Таким образом, $-(1) = -1$ и $-(-1) = 1$.

Чтобы получить 4, используем четыре кнопки 1.



Запишем как «1 + 1 + 1 + 1 = 4».

Чтобы получить –3, используем три кнопки –1.



Запишем как «(–1) + (–1) + (–1) = –1 – 1 – 1 = –3».

A Сложение целых чисел

Температура замороженного мяса составляет –3 °C. При нагревании его температура поднялась на 4 градуса. Сколько градусов составила температура мяса?

Чтобы ответить на вопрос, надо вычислить (–3) + 4, т. е. надо **сложить целые числа**.

Сложение целых чисел можно изобразить с помощью алгебраических кнопок. Для этого понадобится понятие **нулевой пары** – кнопок 1 и –1.



Таким образом, 1 ☐ = 1 ☐ = 0 и 3 ☐ = 3 ☐ = 0.

Рассмотрим, как можно **сложить целые числа** с помощью алгебраических кнопок.

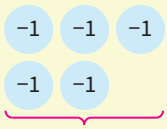
АКТИВИЗИРУЮЩЕЕ ЗАДАНИЕ 2

Цель: сложение целых чисел с помощью алгебраических кнопок.

Сложение целых чисел с одинаковыми знаками.

Пример.

Вычислите: (−3) + (−2).



Чтобы изобразить −3, возьмите три кнопки −1 .

Чтобы изобразить +(−2), прибавьте две кнопки −1 .

∴ (−3) + (−2) = −5

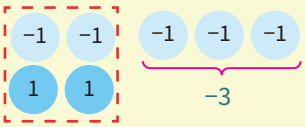
Запишем это следующим образом: (−3) = −3
= −5.

1 Вычислите с помощью алгебраических кнопок.

a) 5 + 1 **b)** (−5) + (−5) **c)** (−2) + (−3) **d)** (−3) + (−5)

Пример.

Вычислите: (−5) + 2.



Чтобы получить −5, надо взять 5 кнопок −1 .

Чтобы получить +2, надо прибавить две кнопки 1 .

Уберите нулевые пары.

В этом примере мы сложили положительные и отрицательные числа. Так как количество кнопок «–1» было больше, чем количество кнопок «1», ответ будет отрицательным.

∴ (−5) + 2 = −3

Запишем это следующим образом: (−5) + 2 = −5 + 2
= −3.

Также можно записать так: + 2 = 2
= 2
= −3.

2 Вычислите с помощью алгебраических кнопок.

a) 7 + (−3) **b)** (−4) + 6 **c)** 3 + (−5) **d)** 5 + (−2)

3 Вычислите с помощью алгебраических кнопок. Что вы заметили?

a) 2 + 3 и 3 + 2 **b)** (−5) + 4 и 4 + (−5)

С помощью ответов из пунктов **3a)** и **3b) активизирующего задания 2** мы определили следующее:

Сложение целых чисел коммутативно, т. е. 3 + 2 = 2 + 3, (−5) + 4 = 4 + (−5).

От перестановки мест слагаемых сумма целых чисел не меняется.

4 ПРИМЕР

Для следующих выражений сначала определите знак (положительный или отрицательный), а затем найдите их значение без использования калькулятора или алгебраических кнопок.

a) (−8) + (−7) **b)** 25 + (−11) **c)** (−16) + 9 **d)** 0 + (−4)

РЕШЕНИЕ

a) (−8) + (−7)

Так как оба числа отрицательные, ответ будет отрицательным.

(−8) + (−7) = −8 − 7

= −15

b) 25 + (−11)

Так как количество положительных единиц больше количества отрицательных, сумма положительна.

25 + (−11) = 25 − 11

= 14

c) (−16) + 9

Так как количество отрицательных единиц больше количества положительных, сумма отрицательна.

(−16) + 9 = −16 + 9

= −7

или (−16) + 9 = 9 + (−16)

= 9 − 16

= −7

d) 0 + (−4)

Так как одно слагаемое равно нулю, а другое состоит только из отрицательных единиц, сумма отрицательна.

0 + (−4) = 0 − 4

= −4

4 ПРОВЕРЬТЕ СЕБЯ

Для следующих выражений сначала определите знак (положительный или отрицательный), а затем вычислите без использования калькулятора или алгебраических кнопок.

a) (−16) + (−14) **b)** 17 + (−9) **c)** −13 + 21

d) (−23) + 12 **e)** 0 + (−25) **f)** 14 + (−26)

5 ПРИМЕР

Вы добавили на банковский счёт 100 000 сумов, затем перевели 120 000 сумов на другой счёт. Как изменится первоначальный баланс?

РЕШЕНИЕ

Будем считать, что добавленная сумма – положительное число, а переведённая на другой счёт – отрицательное.

Добавленная сумма = 100 000 сумов.

Переведённая сумма на другой счёт = –120 000 сумов.

Изменение баланса = 100 000 + (–120 000)= –20 000 сумов.

= –20 000 сумов.

Первоначальный баланс изменился на –20 000 сумов или уменьшился на 20 000 сумов.

5 ПРОВЕРЬТЕ СЕБЯ

a) Температура вещества за первый час поднялась на 6 градусов и за второй час опустилась на 7 градусов. Как изменилась температура вещества за эти два часа?

b) Жамиля заняла у Баходира 180 000 сумов. Через некоторое время она вернула 130 000 сумов. Сколько сумов осталось отдать Жамиле?

В Вычитание целых чисел

Изменив знак числа, мы получим число, **противоположное** данному числу. Например, число, противоположное 3, – это –3, а число, противоположное числу –3, – это –(–3) = 3. Переворачивая алгебраические кнопки, можно получить противоположное число.



$-(3) = -3$ $-(-3) = 3$

Рассмотрим, как можно выполнить **вычитание целых чисел** с помощью алгебраических кнопок.

ВСПОМНИТЕ

Число, противоположное числу 1, записывается в виде $-(1) = -1$.

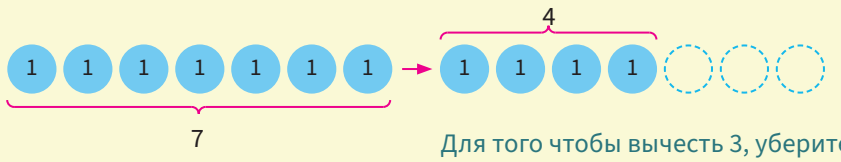
Число, противоположное числу –1, записывается в виде $-(-1) = 1$.

АКТИВИЗИРУЮЩЕЕ ЗАДАНИЕ 3

Цель: выполнение вычитания целых чисел с помощью алгебраических кнопок. Вычитание положительных целых чисел.

Примеры.

1) Вычислите: 7 − 3.

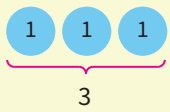


Для того чтобы вычесть 3, уберите 3 кнопки 1.

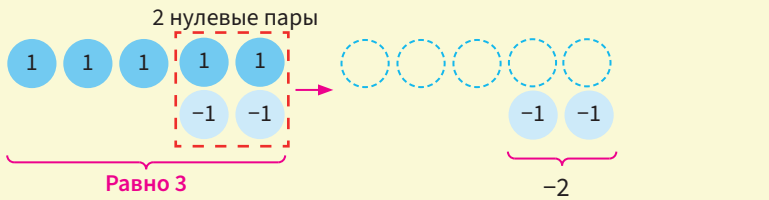
$\therefore 7 - 3 = 4$

Запишем это следующим образом: 7 ☐ = 7 ☐ = 4

2) Вычислите: 3 − 5.



Из 3 кнопок нельзя убрать 5 кнопок 1.
Поэтому нужно сначала добавить 2 нулевые пары.

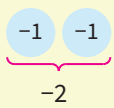


Чтобы вычесть 5, уберите 5 кнопок 1.

$\therefore 3 - 5 = -2$

Запишем это следующим образом: 3 ☐ = 3 ☐ = –2.

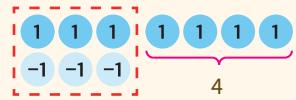
3) Вычислите: (–2) − 4.



Обратите внимание, мы не можем из 2 кнопок –1 убрать 4 кнопки –1.

ВСПОМНИТЕ

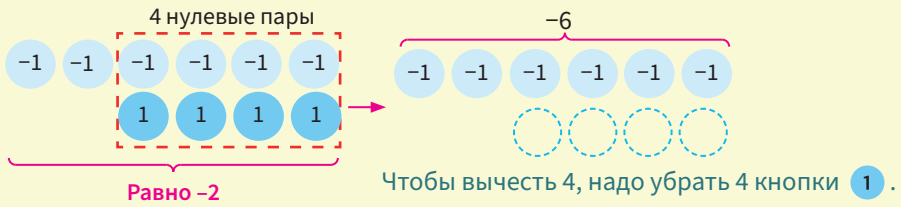
В примере 2 мы увидели, что 5 + (–2) = 5 – 2 = 3.
Значит, выражение **из активизирующего задания 3** мы можем записать в виде 7 − 3 = 7 + (−3)= 4. То есть,



ОБРАТИТЕ ВНИМАНИЕ!

Мы можем добавить любое количество нулевых пар, но, чтобы убрать 5 кнопок 1, достаточно добавить 2 нулевые пары.

Для этого добавим 4 нулевые пары.



∴ (−2) − 4 = −6

Запишем это следующим образом:

(−2) − 4 = −2 − 4 = −6 или (−2) ▭ = (−2) ▭ = −6

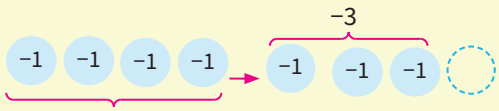
1 Вычислите.

a) 5 − 2 **b)** 3 − 4 **c)** (−3) − 1 **d)** (−6) − 3

Вычитание отрицательных чисел

Примеры.

1) Вычислите: (−4) − (−1).

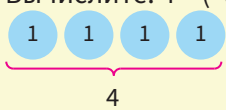


Чтобы вычесть −1, надо убрать 1 кнопку −1 .

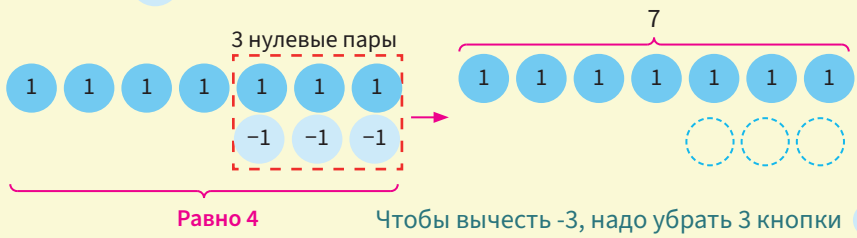
∴ (−4) − (−1) = −3

Запишем это следующим образом: (−4) ▭ = −4 ▭ = −3.

2) Вычислите: 4 − (−3).



Обратите внимание, здесь 4 кнопки 1 . Нельзя убрать 3 кнопки −1 . Поэтому добавим 3 нулевые пары.



Чтобы вычесть -3, надо убрать 3 кнопки −1 .

∴ 4 − (−3) = 7

Запишем это следующим образом: 4 ▭ = 4 ▭ = 7.

2 Вычислите.

a) (−9) − (−7) **b)** (−3) − (−5) **c)** 6 − (−3) **d)** 2 − (−4)

С помощью **активизирующего задания 3** мы определили следующее:

- **Вычитание некоторого числа можно заменить сложением противоположного ему числа.**

  Например, 3 ▭ = 3 ▭.

  (из 3 вычесть 5) (к 3 прибавить отрицательное 5)

- **Вычитание отрицательного числа можно заменить положительным числом.**

  Например, ▭ = ▭.

  (вычесть отрицательное 5) (положительное 5)

6 ПРИМЕР

Вычислите без использования калькулятора или алгебраических кнопок.

a) 0 − (−17) **b)** 5 − 8 **c)** −16 − (−9)

РЕШЕНИЕ

a) 0 ☐ = 0 ☐
= 17

b) 5 ☐ = 5 ☐
= −3

c) −16 ☐ = −16 ☐
= −7

Сумма 0 и положительного числа будет положительным числом.

Если число отрицательных единиц больше положительных единиц, то ответ будет отрицательным.

6 ПРОВЕРЬТЕ СЕБЯ

Вычислите без использования калькулятора или алгебраических кнопок.

a) 13 − (−21) **b)** −19 − (−4) **c)** 3 − (−26)
d) 13 − 21 **e)** −14 − 24 **f)** −11 − (−25)

7 ПРИМЕР

В августе Ташкент находится в часовом поясе GMT+5, а Нью-Йорк – в часовом поясе GMT–4.

a) На сколько часов местное время в Ташкенте опережает местное время в Нью-Йорке?

b) Какая дата и какое местное время будет в Нью-Йорке, когда в Ташкенте наступит 9 августа 03:00?

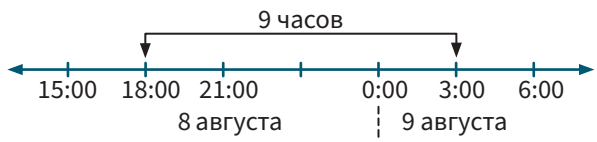
РЕШЕНИЕ

a) Для того чтобы узнать, на сколько часов местное время в Ташкенте опережает местное время в Нью-Йорке, определим разницу во времени между этими городами.

5 − (−4) = 5 + 4
= 9 часов

В августе местное время в Ташкенте опережает местное время в Нью-Йорке на 9 часов.

b) Чтобы показать время, воспользуемся чертежом. По чертежу можно определить, что в Нью-Йорке будет 8 августа 18:00.



7 ПРОВЕРЬТЕ СЕБЯ

В июле Сидней будет находиться в часовом поясе GMT+8, а Ванкувер – в часовом поясе GMT–4.

a) На сколько часов местное время в Ванкувере отстаёт от местного времени в Сиднее?

b) Каким будет местное время и дата в Сиднее, когда в Ванкувере наступит 3 июля 16:00?

c) Жанет живёт в Ванкувере и хочет полететь в Сидней. Каково будет местное время и дата в Сиднее по приземлении самолёта, если самолёт вылетает 3 июля в 16:00 и весь полёт занимает 15 часов 30 минут?

ОБСУДИТЕ

Будет ли вычитание целых чисел коммутативным? Обоснуйте свой ответ.

ЭТО ИНТЕРЕСНО!

Среднее время по Гринвичу (GMT) – среднее солнечное время меридиана, на котором была расположена Королевская обсерватория в Гринвиче в Англии. Среднее время по Гринвичу рассчитывается по Гринвичскому (или нулевому) меридиану. Нулевой меридиан – это линия, соединяющая Северный полюс с Южным полюсом и проходящая через Королевскую обсерваторию с долготой 0°. В Узбекистане время опережает среднее время по Гринвичу на 5 часов. Поэтому мы говорим, что часовой пояс в Узбекистане – GMT+5.

2.2 ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ

НАЧАЛЬНЫЙ УРОВЕНЬ

Выполните задания без использования калькулятора.

1 Вычислите.

a) −13 + 5 **b)** (−27) + (−3)
c) (−4) + 18 **d)** 18 + (−7)
e) 0 + (−12) **f)** −37 + 37
g) −16 + (−25) **h)** 24 + (−30)

2 Вычислите.

a) 6 − 13 **b)** (−17) − 8
c) 29 − (−7) **d)** −12 − (−23)
e) (−5) − (−5) **f)** −6 − 24
g) (−19) − (−8) **h)** 11 − (−24)

СРЕДНИЙ УРОВЕНЬ

3 Найдите значения выражений.

a) 3 − (−8) + (−4) **b)** (−2) − (−5) + (−3)
c) (−9) + (−2) − (−7) **d)** 8 − (−2) + (−8)
e) 7 + (−12) + (−6) **f)** −19 − (−15) + 10
g) 15 − (−7) + (−7) **h)** −12 + (−9) + (−3)

4 Найдите пропущенные числа.

a) 7 + ☐ = 3 **b)** 11 + ☐ = −5
c) −9 − ☐ = −13 **d)** −8 − ☐ = 10
e) −8 + ☐ = 6 **f)** 4 − ☐ = 7

5 Температура замерзания воды составляет 0 °C. Если в воду добавить соль, то температура замерзания снизится на 6 градусов. Найдите температуру замерзания воды после добавления соли.
Примечание: Посыпание дорог солью – один из способов обеспечить безопасное движение транспортных средств без скольжения в зимний период за счёт снижения температуры замерзания.

6 Вертолёт, летевший на высоте 120 m выше уровня моря, заметил подводную лодку. Каково вертикальное расстояние между вертолётом и подводной лодкой, если лодка находится на 39 m ниже уровня моря?

7 Вчера на банковском счёте Жамола было 300 000 сумов. Сегодня его отец положил на этот счёт 600 000 сумов. Завтра Жамол планирует снять со счёта 200 000 сумов. Сколько денег останется на счёте, если снятые со счёта деньги выразить в виде числа −200 000?

a) Сколько денег на счёте Жамола сегодня?
b) Сколько денег на счёте Жамола будет завтра?

8 Автомобиль проехал 16 km на юг, затем 33 km на север и 12 km снова на юг. Каково его окончательное местоположение после начала движения?

9 открытое Определите истинность или ложность следующих высказываний о числах. Если высказывание ложно, то приведите контрпример.

a) Положительное + Положительное = Отрицательное
b) Отрицательное + Положительное = Положительное
c) Отрицательное − Положительное = Отрицательное
d) Отрицательное − Отрицательное = Положительное

ВЫСОКИЙ УРОВЕНЬ

10 Али 4 месяца назад начал малый бизнес. В таблице приведены сведения о его доходах (положительное) и расходах (отрицательное).

a) Найдите доход / расход за 4 месяца.
b) Каким должен быть доход Али в 5-м месяце, чтобы общий доход за первые 5 месяцев составил 18 000 000 сумов?

Месяцы	Доход / Расход
1	−23 000 000 сумов
2	−6 000 000 сумов
3	9 000 000 сумов
4	17 000 000 сумов

11 Азиз вылетел из Лондона в Нью-Йорк 8 ноября в 08:30. Самолёт приземлился в Нью-Йорке по местному времени 8 ноября в 11:10. Найдите время полёта из Лондона в Нью-Йорк, если часовые пояса Лондона – GMT+0, а Нью-Йорка – GMT−5.

12 Вычислите.
1 − 2 + 3 − 4 + 5 − 6 + … + 99 − 100.

2.3 УМНОЖЕНИЕ И ДЕЛЕНИЕ ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ. ВЫПОЛНЕНИЕ ДЕЙСТВИЙ НАД ЦЕЛЫМИ ЧИСЛАМИ

A Умножение целых чисел

КЛЮЧЕВЫЕ ТЕРМИНЫ

- умножение целых чисел
- обратное число
- деление целых чисел
- порядок выполнения действий
- алгебраический квадратный корень

Мы знаем, что умножение натуральных чисел можно заменить сложением. Например, $3 \times 4 = 4 + 4 + 4 = 12$.

Рассмотрим **умножение целых чисел** с помощью алгебраических кнопок.

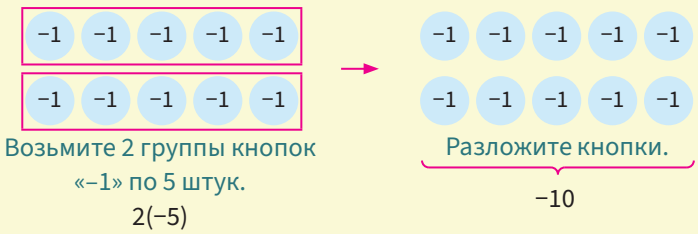
АКТИВИЗИРУЮЩЕЕ ЗАДАНИЕ 4

Цель: умножение целых чисел с помощью алгебраических кнопок.

Умножение положительного целого на отрицательное целое число

Пример.

Вычислите: $2 \times (-5)$.



$\therefore 2 \times (-5) = -10$

1 Вычислите.

a) $5 \times (-2)$ **b)** $4 \times (-3)$

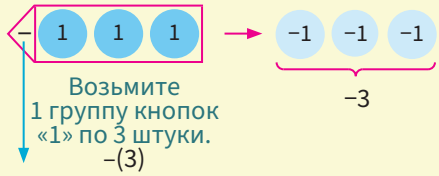
Умножение отрицательного целого числа на положительное целое число

Примеры:

1) Вычислите: $(-1) \times 3$.

Произведения $(-1) \times 3$ и $-(1 \times 3)$ равны.

Переворачиванием алгебраических кнопок можно показать, что выражение $-(1 \times 3)$ имеет значение, противоположное группе из трёх **1**.



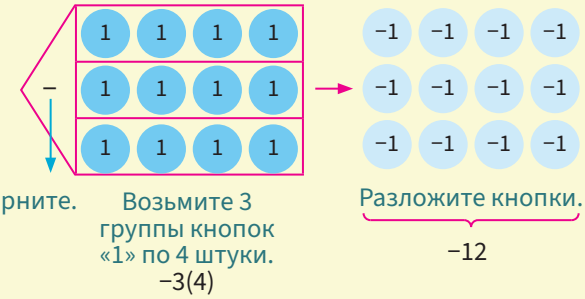
Этот знак показывает, что все кнопки в фигуре нужно перевернуть.

$\therefore (-1) \times 3 = -3$

2) Вычислите: (−3) × 4.

(−3) × 4 = −(3 × 4)

Переверните 3 группы кнопок по 4 штуки, чтобы показать противоположное значение выражения.



∴ (−3) × 4 = −12

2 Вычислите.

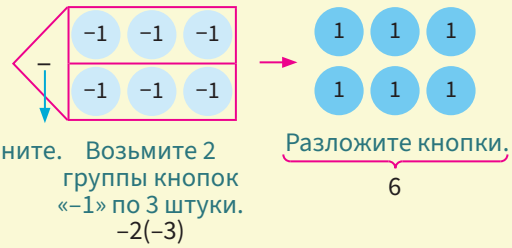
a) (−5) × 2 **b)** (−2) × 3

Умножение двух целых отрицательных чисел

Пример. (−2) × (−3).

(−2) × (−3) = −[2 × (−3)]

Переверните 2 группы кнопок по 3 штуки, чтобы показать противоположное значение выражения.



∴ (−2) × (−3) = 6

3 Вычислите.

a) (−3) × (−2) **b)** (−4) × (−3)

4 Определите, положительны или отрицательны следующие числа, используя ответы из заданий **1**, **2** и **3**.

a) Произведение двух положительных целых чисел.

b) Произведение положительного целого числа и отрицательного целого числа.

c) Произведение отрицательного целого числа и положительного целого числа.

d) Произведение двух отрицательных целых чисел.

5 Вычислите. Что вы заметили?

a) 2 × 5 и 5 × 2

b) 2 × (−5) и (−5) × 2

c) (−3) × (−6) и (−6) × (−3)

ОБРАТИТЕ ВНИМАНИЕ!

Вспомните, что число, противоположное числу −3, можно записать в виде −(−3) = 3. Это выражение можно записать таким образом:

−(−3) = ( )

= 3.

С помощью **активизирующего задания 4** мы определили следующее:

- **Положительное целое число × Положительное целое число = Положительное целое число.** Например, 2 × 3 = 6.
- **Положительное целое число × Отрицательное целое число = Отрицательное целое число.** Например, 2 × (−3) = −6.
- **Отрицательное целое число × Положительное целое число = Отрицательное целое число.** Например, (−2) × 3 = −6.
- **Отрицательное целое число × Отрицательное целое число = Положительное целое число.** Например, (−2) × (−3) = 6.
- **Произведение двух целых чисел коммутативно.** Например, 5 × 2 = 2 × 5, 2 × (−5) = (−5) × 2, (−3) × (−6) = (−6) × (−3).

+	×	+	=	+
+	×	−	=	−
−	×	+	=	−
−	×	−	=	+

8 ПРИМЕР

Найдите значения выражений без использования калькулятора или алгебраических кнопок.

a) (−6) × 9 **b)** (−4) × (−4)

c) (−2) × (−2) × (−2) **d)** 8 × (−4) × (−7)

ОБРАТИТЕ ВНИМАНИЕ!

Произведение (−4) × (−4) можно ещё записать в виде $(-4)^2$. Из **примера 8b)** видно, что $(-4)^2$ тоже положительное число.

РЕШЕНИЕ

a) (−6) × 9 = −(6 × 9) = −54 — Отрицательное число × Положительное число = Отрицательное число; (−) × (+) → (−)

b) (−4) × (−4) = 4 × 4 = 16 — Отрицательное число × Отрицательное число = Положительное число; (−) × (−) → (+)

c) (−2) × (−2) × (−2) = [(−2) × (−2)] × (−2)
= 4 × (−2) — (−) × (−) → (+)
= −8 — (+) × (−) → (−)

d) 8 × (−4) × (−7) = (−32) × (−7)
= 32 × 7 — (+) × (−) → (−)
= 224 — (−) × (−) → (+)

ОБРАТИТЕ ВНИМАНИЕ!

Из **примера 8c)** следует, что $\sqrt[3]{-8} = -2$, то есть кубический корень из отрицательного числа является отрицательным числом.

8 ПРОВЕРЬТЕ СЕБЯ

Найдите значения выражений без использования калькулятора или алгебраических кнопок.

a) (−12) × 8 **b)** (−66) × 0

c) (−7) × (−7) **d)** (−3) × (−3) × (−3)

e) $(-4)^3$ **f)** (−5) × 6 × (−4)

9 ПРИМЕР

Найдите значения выражений без использования калькулятора или алгебраических кнопок.

a) Квадратный корень из 36. **b)** Кубический корень из −1000.

АНАЛИЗ

В **примере 8 b)** оба числа: и 4 и −4, являются квадратными корнями из 16. Они называются алгебраическими квадратными корнями. Если ■ – это положительный квадратный корень из 36, то – ■ также является отрицательным квадратным корнем из 36.

РЕШЕНИЕ

a) $36 = 2 \times 2 \times 3 \times 3$
$= (2 \times 3) \times (2 \times 3)$
$= (2 \times 3)^2$

Алгебраический квадратный корень из 36 $= \pm\sqrt{36}$
$= \pm\sqrt{(2 \times 3)^2}$
$= \pm(2 \times 3)$
$= \pm 6$

b) $1000 = 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 5$
$= (2 \times 5) \times (2 \times 5) \times (2 \times 5)$
$= (2 \times 5)^3$

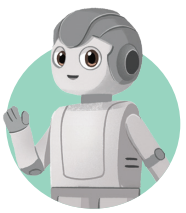
$-1000 = -(2 \times 5)^3$

Кубический корень из $-1000 = \sqrt[3]{-1000}$
$= \sqrt[3]{-(2 \times 5)^3}$
$= -\sqrt[3]{(2 \times 5)^3}$
$= -(2 \times 5)$
$= -10$

Памятка Знак ± читается: «плюс минус».

ОБОЗНАЧЕНИЯ

В **примере 8 b)** мы увидели, что $(-4)^2 = 16$. Значит, -4 тоже является алгебраическим квадратным корнем из 16.
Знак $\sqrt{\ }$ означает только положительный квадратный корень, то есть $\sqrt{16} = -4$ не пишется. Вместо этого следует писать $\sqrt{16} = 4$ и $-\sqrt{16} = -4$.
Алгебраический квадратный корень из 16 можем записать в виде $\pm\sqrt{16}$, то есть $\pm\sqrt{16} = \pm 4$.
Как вы запишете алгебраический квадратный корень из 25?



ПОДУМАЙТЕ

1. Имеет ли смысл квадратный корень из -16? Обоснуйте свой ответ.
2. **a)** Могут ли кубические корни быть как положительными, так и отрицательными числами?
   b) Сколько кубических корней имеет каждое число? Обоснуйте свой ответ.

9 ПРОВЕРЬТЕ СЕБЯ

Вычислите без использования калькулятора.

a) Квадратный корень из 64 **b)** Кубический корень из -64

c) $\sqrt{121}$ **d)** $-\sqrt[3]{-125}$

B Деление целых чисел

Выражение $12 \div 3$ можно записать в виде $12 \times \frac{1}{3}$. Ответы обоих выражений будут равными.

$$12 \div 3 = 12 \times \frac{1}{3}$$
$$= 4$$

$\frac{1}{3}$ – это число, **обратное** числу 3. А 3 – это число, обратное числу $\frac{1}{3}$.
Таким образом, правило **деления целых чисел** можно вывести на основании правила умножения целых чисел.

ОБСУДИТЕ

Чему может быть равно $4 \div 0$?

Примеры.

$4 \times 3 = 12$	$12 \div 3 = \frac{12}{3} = 12 \times \frac{1}{3} = 4$
$4 \times (-3) = -12$	$(-12) \div (-3) = \frac{-12}{-3} = (-12) \times \frac{1}{-3} = 4$
$(-4) \times 3 = -12$	$(-12) \div 3 = \frac{-12}{3} = (-12) \times \frac{1}{3} = -4$
$(-4) \times (-3) = 12$	$12 \div (-3) = \frac{12}{-3} = 12 \times \frac{1}{-3} = -4$

10 ПРИМЕР

Вычислите.

a) $20 \div 5$ **b)** $(-42) \div (-7)$ **c)** $24 \div (-6)$ **d)** $(-36) \div 3$

РЕШЕНИЕ

a) $20 \div 5 = \frac{20}{5} = 4$

b) $(-42) \div (-7) = \frac{-42}{-7} = 6$

c) $24 \div (-6) = -\frac{24}{6} = -4$

d) $(-36) \div 3 = -\frac{36}{3} = -12$

10 ПРОВЕРЬТЕ СЕБЯ

Вычислите.

a) $16 \div 2$ **b)** $(-75) \div (-5)$

c) $63 \div (-7)$ **d)** $(-54) \div 6$

C Выполнение действий над целыми числами

В этой части мы распространим правила **порядка выполнения действий** над натуральными числами на все целые числа следующим образом:

- **Скобки.** Сначала выполните действия в скобках. Если скобок несколько, начинайте с внутренних.
- **Степени и корни.** Затем вычислите степени и корни.
- **Умножение и деление.** Далее выполните умножение и деление слева направо.
- **Сложение и вычитание.** В конце выполните сложение и вычитание слева направо.

11 ПРИМЕР

Вычислите значения следующих выражений без использования калькулятора.

a) $23 - 56 \div (-8) + (-5)$

b) $(-2)^3 \times 7 - [(-5) + (-1)]^2 \div (-4)$

c) $(-11) - (-6)^3 \div [(-4) + (-8)] + (-5)^2$

РЕШЕНИЕ

a) $23 - 56 \div (-8) + (-5)$

$= 23 - [-(56 \div 8)] + (-5)$ Сначала разделите.

$= 23 - (-7) + (-5)$ Выполните сложение и вычитание слева направо.

$= 23 + 7 - 5$

$= 25$

b) $(-2)^3 \times 7 - [(-5) + (-1)]^2 \div (-4)$

$= (-2)^3 \times 7 - (-6)^2 \div (-4)$ Сначала вычислите сумму в квадратных скобках.

$= (-8) \times 7 - 36 \div (-4)$ Вычислите степени.

$= -56 - (-9)$ Выполните умножение и деление.

$= -56 + 9$ Выполните сложение.

$= -47$

c) $(-11) - (-6)^3 \div [(-4) + (-8)] + (-5)^2$

$= (-11) - (-6)^3 \div (-12) + (-5)^2$ Сначала вычислите сумму в квадратных скобках.

$= (-11) - (-216) \div (-12) + 25$ Вычислите степени.

$= (-11) - 18 + 25$ Выполните деление.

$= -11 - 18 + 25$ Выполните сложение и вычитание слева направо.

$= -4$

ОБСУДИТЕ

Ученик вычислил $33 + (-5)^2$ следующим образом:

$33 + (-5)^2 = 33 - 25$

$= 8.$

Верно ли он решил? Если неверно, то найдите правильный ответ.

ВСПОМНИТЕ

$(-2)^3 = (-2) \times (-2) \times (-2)$

$(-6)^2 = (-6) \times (-6)$

11 ПРОВЕРЬТЕ СЕБЯ

Вычислите без использования калькулятора.

a) $15 - 5 \times (-2) - [30 - (1 - 3^2)]$ **b)** $(-6)^2 \div (-12) + [(-8) - (-3)]^2 \times (-2)$

c) $(5 - 9)^2 \div [(-5) - (-3)]^3 - (-7) \times (-6) + (-20)$

2.3 ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ

НАЧАЛЬНЫЙ УРОВЕНЬ

Выполните задания без использования калькулятора.

1 Вычислите.

a) $8 \times (-9)$ **b)** $(-5) \times (-4)$

c) $(-6) \times 7$ **d)** -3×0

e) $(-12)^2$ **f)** $-(-4)^3$

g) $(-3)^2 \times (-5)$ **h)** $(-2)^3 \times (-9)$

2 Вычислите.

a) $(-38) \div (-2)$ **b)** $132 \div (-11)$

c) $65 \div 5$ **d)** $(-57) \div 3$

e) $\frac{0}{-7}$ **f)** $(-144) \div (-9)$

g) $(-6)^3$ **h)** $\frac{162}{(-3)^3}$

3 Вычислите.

a) $\sqrt{169}$

b) Квадратный корень из 361

c) $-\sqrt[3]{27}$

d) $\sqrt[3]{-343}$

СРЕДНИЙ УРОВЕНЬ

4 Вычислите.

a) $(-6) \times 3 \times (-1)$

b) $(-84) \div 7 \times 5$

c) $(-37) \times 0 - (-8)$

d) $63 \div (-9) + (-2) \times (-10)$

e) $(-47) - 33 \div (-3) - 3 \times (-7)$

f) $196 \div [(-8) + (-6)] \times (-2)$

g) $[(-23) + 14] \times (-2)^2$

h) $(-45) \times 6 \div (-3)^3$

i) $(-7) \times (-8) \times 0 \times 34 - 4 \times (-5)^2$

j) $(-6)^3 \div 3^2 \div [-9 - (-8)]^3$

5 После того как Бахора начала посещать фитнес-клуб, на протяжении 3 месяцев её масса уменьшалась на 2 kg ежемесячно.

a) Выразите ежемесячное уменьшение массы Бахоры через отрицательное число.

b) Определите массу Бахоры через три месяца, если первоначально она весила 65 kg.

ВЫСОКИЙ УРОВЕНЬ

6 Объём воды в резервуаре каждую минуту уменьшается на 3 ℓ. В 09:00 в сосуде было 120 ℓ воды. Найдите объём воды в:

a) 9:30 **b)** 8:50

7 Тимур одолжил у друга деньги. Он начал возвращать долг 7 месяцев назад, отдавая ежемесячно по 40 000 сумов. В данный момент осталось выплатить 250 000 сумов.

a) Какую сумму Тимур взял в долг?

b) Какую сумму останется выплатить через 3 месяца?

8 Жамиля вышла из дома и побежала по спортивной дорожке. В течение первых 20 минут она передвигалась со скоростью 4 m/s на север, затем – в течение 15 минут со скоростью 5 m/s на юг, потом – в течение 10 минут со скоростью 3 m/s дальше на юг. Каково было её конечное местоположение относительно дома?

9 Вершина Хазрет-Султан находится на высоте 4643 m выше уровня моря, а самая низкая точка пещеры Бой-Булок – на высоте 1517 m ниже уровня моря.

a) Найдите вертикальное расстояние между самой высокой точкой вершины Хазрет-Султан и самой низкой точкой пещеры Бой-Булок.

b) Найдите высоту, равную половине вертикального расстояния между самой высокой точкой вершины Хазрет-Султан и самой низкой точкой пещеры Бой-Булок.

10 открытое Викторина состоит из 5 вопросов и оценивается следующим образом:
– за каждый правильный ответ 3 балла;
– за каждый неправильный ответ –2 балла;
– за вопрос без ответа 0 баллов.

a) Каков наибольший балл викторины?

b) Каков наименьший балл викторины?

c) В каком случае учащийся может получить 3 балла?

d) В каком случае учащийся может получить –3 балла?

11 открытое **a)** Заполните одинаковые фигуры в данной таблице одинаковыми целыми числами.

Левая часть	Правая часть
□ × ○	○ × □
(□ × ○) × ⬡	□ × (○ × ⬡)
□ ÷ ○	○ ÷ □
(□ ÷ ○) ÷ ⬡	□ ÷ (○ ÷ ⬡)

b) Вычислите каждое выражение и сравните ответы правой и левой частей. Что вы поняли?

2.4 РАЦИОНАЛЬНЫЕ, ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ И ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА

A Рациональные числа

Следующие числа можем записать в виде $\frac{a}{b}$, где a и b – целые числа и $b \neq 0$.

Ноль: 0

Положительные целые числа: 1; 2; 3; ...

Отрицательные целые числа: −1; −2; −3; ...

Обыкновенные дроби и смешанные числа: $\frac{1}{2}; \frac{4}{3}; 5\frac{2}{7}$; ...

Конечные десятичные дроби: 0,4; 7,75; ...

Например,

$0 = \frac{0}{7}$, $2 = \frac{2}{1}$, $-3 = \frac{-3}{1}$, $5\frac{2}{7} = \frac{37}{7}$, $0{,}4 = \frac{2}{5}$ и $7{,}75 = 7\frac{3}{4} = \frac{31}{4}$.

Это **рациональные числа**.

Числа, которые можно записать в виде $\frac{a}{b}$, называются рациональными числами, где a и b – целые числа и $b \neq 0$.

Рассмотрим связь между разными видами чисел.

Рациональные числа

Например: −9; −5; 0; 0,4; 3; 11; $-2\frac{1}{7}; \frac{3}{8}; -\frac{9}{4}$

Целые числа

Например: −9; −5; 0; 3; 11

Положительные целые числа и 0
(неотрицательные целые числа)
Например: 0; 3; 11

Отрицательные целые числа
Например: −9; −5

Дроби

Например: $-2\frac{1}{7}; \frac{3}{8}$; 0,4 (или $\frac{2}{5}$); $-\frac{9}{4}$

Любое рациональное число вида $\frac{a}{b}$ можно записать в виде десятичной дроби путём деления числителя дроби на его знаменатель. Рассмотрим примеры того, как можно представить рациональное число в виде десятичной дроби.

12 ПРИМЕР

Запишите рациональные числа в виде десятичных дробей.

a) $\frac{3}{8}$ **b)** $\frac{1}{9}$ **c)** $\frac{53}{99}$ **d)** $\frac{47}{999}$

РЕШЕНИЕ

a) $\frac{3}{8} = 3 \div 8$
$= 0{,}375$

b) $\frac{1}{9} = 0{,}111111111...$
$= 0{,}(1)$

c) $\frac{53}{99} = 0{,}53535353...$
$= 0{,}(53)$

d) $\frac{47}{999} = 0{,}047047047...$
$= 0{,}(047)$

КЛЮЧЕВЫЕ ТЕРМИНЫ

- рациональные числа
- конечные десятичные дроби
- периодические дроби
- иррациональные числа
- действительные числа

ЭТО ИНТЕРЕСНО!

Слово «рациональное» исходит от слова “ratio”, то есть «отношение». Мы знаем, что отношение чисел можно записать в виде обыкновенной дроби. Например, число девочек от числа мальчиков можно записать в виде $\frac{3}{5}$.

Более подробно отношения мы изучим в следующих разделах.

ОБРАТИТЕ ВНИМАНИЕ!

Конечную десятичную дробь можно записать в виде обыкновенной дроби.

ОБРАТИТЕ ВНИМАНИЕ!

При использовании калькулятора ответ выражения 1 ÷ 9 выражается десятичной дробью: 0,111111111... Так как экран калькулятора не может показать все цифры, мы должны знать группу повторяющихся цифр дроби. При делении 1 на 9 всё время повторяется остаток 1.

```
 10 | 9
 -9 | 0,111...
 ---
 10
 -9
 ---
  1 0...
```

a) Дробь 0,375 – **конечная десятичная дробь**, так как она содержит конечное число цифр. А десятичные дроби в пунктах **b)**, **c)** и **d)** не конечные, так как содержат бесконечно много цифр, которые повторяются периодически. Такие десятичные дроби называются **периодическими десятичными дробями**.

b) $\frac{1}{9} = 0{,}111111111\ldots$. Здесь повторяется только цифра 1 и записывается в скобках:

$\frac{1}{9} = 0{,}(1)$.

c) $\frac{53}{99} = 0{,}53535353\ldots$ и **d)** $\frac{47}{999} = 0{,}047047047\ldots$ В каждом из этих чисел есть повторяющиеся группы цифр. Запишем их в скобках:

$\frac{53}{99} = 0{,}(53)$ и $\frac{47}{999} = 0{,}(047)$.

Мы увидели, что при записи вышеуказанных **рациональных чисел** в виде десятичных дробей они могут быть либо конечными, либо периодическими десятичными дробями.

ОБСУДИТЕ

Число 0,31818 – периодическая десятичная дробь? Почему?

12 ПРОВЕРЬТЕ СЕБЯ

Запишите обыкновенные дроби в виде десятичных дробей и определите, конечными или периодическими десятичными дробями они являются.

a) $\frac{9}{16}$ **b)** $\frac{1}{6}$ **c)** $\frac{9}{11}$ **d)** $\frac{7}{22}$

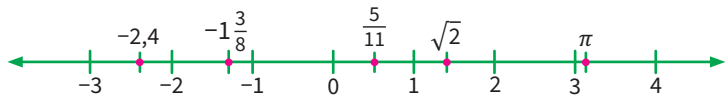
B Иррациональные и действительные числа

Но есть числа, которые нельзя записать в виде $\frac{a}{b}$, где a и b – целые числа и $b \neq 0$. Их нельзя представить в виде конечной или периодической десятичной дроби. Эти числа называются **иррациональными числами**. Например, π или $\sqrt{2}$. С помощью компьютера вычислены тысячи цифр после запятой числа π, и очевидно, что они не имеют периода. Таким же образом, в десятичной записи числа $\sqrt{2}$ нет периодических повторений, и $\sqrt{2}$ также является иррациональным числом. Рациональные и иррациональные числа вместе составляют **действительные числа**. Это можно изобразить следующим образом:

Действительные числа

Рациональные числа	**Иррациональные числа**
$-2{,}4;\ -\frac{1}{2};\ -1\frac{3}{8};\ \frac{5}{11};\ 2\frac{2}{5}$	$\sqrt{2};\ \pi$

Любое действительное число можно представить точкой на числовой оси.



ПОДУМАЙТЕ

Можете ли вы составить иррациональное число в виде десятичной дроби, используя: **a)** только 1; **b)** только 0 и 1?

Если ваш ответ положительный, запишите это число. Если отрицательный, приведите контрпример.

13 ПРИМЕР

a) Определите, рациональными или иррациональными являются следующие числа.

1) $-\sqrt[3]{1331}$ **2)** $-5,2(34)$ **3)** $-\pi$

b) Запишите эти числа в порядке убывания.

РЕШЕНИЕ

a) **1)** $-\sqrt[3]{1331} = -\sqrt[3]{11^3}$
$= -11$

$-\sqrt[3]{1331}$ – отрицательное целое число. Значит, это число рациональное.

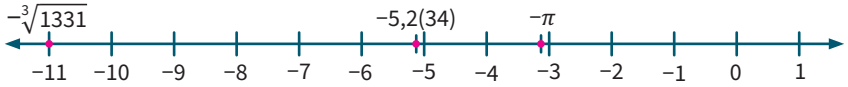
2) $-5,2(34) = -5,2343434...$

$-5,2(34)$ – десятичная дробь с повторяющимся периодом «34». Значит, это рациональное число.

3) $-\pi = -3,1415926...$

Число π – бесконечное, и так как у его дробной части нет повторяющегося периода, то оно иррациональное.

b) Данные числа можно обозначить на числовой оси следующим образом.



Запись чисел в порядке убывания: $-\pi$, $-5,2(34)$ и $-\sqrt[3]{1331}$.

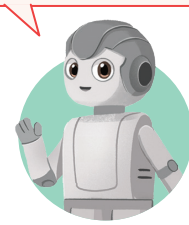
ОБРАТИТЕ ВНИМАНИЕ!

Число π обычно записывают как $\frac{22}{7}$ или 3,142. Это приближённые значения π.

ЧЕРТЕЖИ

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Использование чертежей помогает визуализировать математические объекты. Зная значение чертежа, мы можем использовать его для объединения и анализа мыслей (идей). Числовая ось – это множество точек, где каждая точка означает действительное число.



13 ПРОВЕРЬТЕ СЕБЯ

a) Определите, рациональными или иррациональными являются следующие числа.

1) $-\frac{8}{3}$ **2)** $\sqrt[3]{-3375}$ **3)** $\pi + 1$ **4)** $\frac{0,(034)}{2}$

b) Запишите эти числа в порядке возрастания.

2.4 ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ

НАЧАЛЬНЫЙ УРОВЕНЬ

1 Запишите обыкновенные дроби в виде десятичных дробей. Определите, рациональными или иррациональными они являются.

a) $\frac{3}{4}$ **b)** $-1\frac{2}{5}$ **c)** $\frac{2}{9}$

d) $-\frac{13}{11}$ **e)** $-\frac{7}{12}$ **f)** $-\frac{17}{20}$

2 Запишите десятичные дроби в виде обыкновенных несократимых дробей или в виде смешанных чисел.

a) 0,32 **b)** 0,666

c) 3,45 **d)** −8,25

3 $-\frac{2}{3}$; 0,66666...; 9,(32); $\pi - 3$; 3,1415926; $\sqrt[3]{-216}$

Разделите данные числа по группам:

a) рациональные числа;

b) иррациональные числа.

СРЕДНИЙ УРОВЕНЬ

4 Запишите числа в порядке возрастания.

$\frac{23}{70}$, 0,(302), 0,3(02), 0,30(2), $\frac{1}{3}$

5 **a)** Запишите числа в порядке возрастания.

$\frac{1}{14}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{11}$, $\frac{1}{8}$

b) Запишите числа в порядке убывания.

$\frac{13}{14}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{10}{11}$, $\frac{7}{8}$

ВЫСОКИЙ УРОВЕНЬ

6 Найдите наибольшее число повторяющихся цифр в десятичных дробях, полученных при делении целого числа на:

a) 3 **b)** 7

Обоснуйте свой ответ.

7 Определите истинность или ложность следующих высказываний. Если высказывание ложно, приведите контрпример.

a) Сумма двух иррациональных чисел всегда будет иррациональным числом.

b) Сумма рационального и иррационального чисел всегда будет иррациональным числом.

c) Произведение двух иррациональных чисел всегда будет иррациональным числом.

d) Произведение рационального числа, отличного от 0, и иррационального числа всегда будет иррациональным числом.

8 открытое

Найдите такое число a, где $-\frac{1}{2} < a < -\frac{1}{3}$ и:

a) a – конечная десятичная дробь;

b) a – периодическая десятичная дробь;

c) a – иррациональное число.

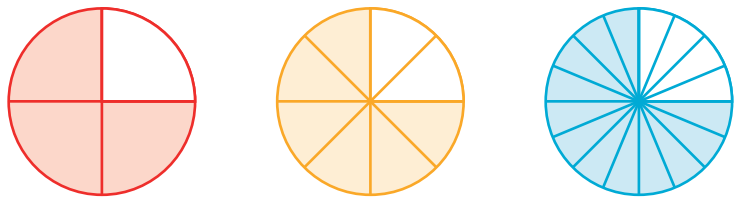
2.5 ВЫПОЛНЕНИЕ ДЕЙСТВИЙ НАД ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫМИ ЧИСЛАМИ

A Обыкновенные дроби

КЛЮЧЕВЫЕ ТЕРМИНЫ

- несократимый вид
- правильная дробь
- неправильная дробь
- смешанное число

Ранее вы изучали равносильные дроби: $\frac{3}{4} = \frac{6}{8} = \frac{12}{16}$.



$\frac{3}{4}$

$\frac{6}{8}$

$\frac{6}{8} = \frac{3 \times}{4 \times} = \frac{3}{4}$

Общий множитель

$\frac{12}{16}$

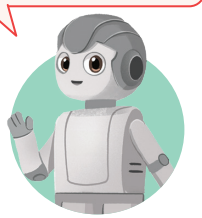
$\frac{12}{16} = \frac{3 \times}{4 \times} = \frac{3}{4}$

Общий множитель

ЧЕРТЕЖИ

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

С помощью чертежа мы можем наглядно увидеть взаимосвязь между закрашенной площадью и целой частью. Отношения закрашенных частей равны. Значит, дроби $\frac{3}{4}$, $\frac{6}{8}$ и $\frac{12}{16}$ будут равносильными.



В числителе и знаменателе дроби $\frac{3}{4}$ нет общего множителя, кроме 1. Эта дробь дана в **несократимом виде**.

Также вы изучали действия над **правильными**, **неправильными дробями** и **смешанными числами**. В этой главе мы будем выполнять четыре действия над рациональными числами вида $\frac{a}{b}$, где a и b – рациональные числа и $b \neq 0$.

ОБРАТИТЕ ВНИМАНИЕ!

Если НОД числителя и знаменателя дроби равен 1, то эта дробь будет несократимой.

Сложение и вычитание обыкновенных дробей

Правила сложения и вычитания целых чисел также распространяются и на обыкновенные дроби.

14 ПРИМЕР

Вычислите без использования калькулятора $\frac{7}{8}-\left(-2\frac{3}{4}\right)+\left(-\frac{1}{3}\right)$

РЕШЕНИЕ

НОК (8, 4, 3) = 24

$$\frac{7}{8}-\left(-2\frac{3}{4}\right)+\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{7}{8}+\frac{11}{4}-\frac{1}{3}$$

$$=\frac{21}{24}+\frac{66}{24}-\frac{8}{24}$$ НОК (3; 4; 8) = 24.

$$=\frac{21+66-8}{24}$$

$$=\frac{79}{24}$$

$$=3\frac{7}{24}$$

14 ПРОВЕРЬТЕ СЕБЯ

Вычислите без использования калькулятора $1\frac{1}{4}+\left(-\frac{8}{3}\right)-\left(-\frac{5}{9}\right)$

Умножение и деление обыкновенных дробей

Мы расширим наши знания об умножении и делении дроби на целое число или правильную дробь, используя смешанные числа, отрицательные дроби и отрицательные смешанные числа. Деление одной обыкновенной дроби на другую обыкновенную дробь и умножение первой дроби на дробь, **обратную** второй, равносильны.

15 ПРИМЕР

Вычислите без использования калькулятора.

a) $-2\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}$ **b)** $1\frac{7}{8}\div1\frac{2}{7}$

РЕШЕНИЕ

a) $-2\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}=-\frac{\overset{3}{\cancel{12}}}{5}\times\frac{3}{\underset{1}{\cancel{4}}}$ Запишите смешанное число в виде неправильной дроби.

Разделите 12 и 4 на их общий делитель 4.

$=-\frac{9}{5}$ Упростите выражение.

$=-1\frac{4}{5}$

b) $1\frac{7}{8}\div1\frac{2}{7}=\frac{15}{8}\div\frac{9}{7}$ Запишите смешанные числа в виде неправильных дробей.

$=\frac{\overset{5}{\cancel{15}}}{8}\times\frac{7}{\underset{3}{\cancel{9}}}$ Умножьте левую дробь на дробь, обратную $\frac{9}{7}$.

Разделите 9 и 15 на их общий делитель 3.

$=\frac{35}{24}$ Упростите выражение.

$=1\frac{11}{24}$

ОБРАТИТЕ ВНИМАНИЕ!

Для умножения и деления обыкновенных дробей их не надо приводить к общему знаменателю.

15 ПРОВЕРЬТЕ СЕБЯ

Вычислите без использования калькулятора.

a) $-6\frac{2}{3}\times\frac{2}{5}$ **b)** $1\frac{5}{9}\div\left(-2\frac{1}{3}\right)$

16 ПРИМЕР

Вычислите без использования калькулятора $\left(-\frac{2}{3}\right)\div\left[\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{3}\right)\right]$

РЕШЕНИЕ

$$\left(-\frac{2}{3}\right)\div\left[\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{3}\right)\right]=\left(-\frac{2}{3}\right)\div\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)$$

$$=\left(-\frac{2}{3}\right)\div\left(\frac{3}{6}+\frac{2}{6}\right)$$

$$=\left(-\frac{2}{3}\right)\div\frac{5}{6}$$

$$=-\frac{2}{\cancel{3}_{1}}\times\frac{\cancel{6}^{2}}{5}$$ Умножьте на число, обратное $\frac{5}{6}$.

$$=-\frac{4}{5}$$

16 ПРОВЕРЬТЕ СЕБЯ

Вычислите без использования калькулятора $\left(-\frac{3}{4}\right)\div\left[\left(-\frac{1}{5}\right)+\left(-\frac{1}{3}\right)\right]$

17 ПРИМЕР

$\frac{1}{4}$ часть участников конференции младше 15 лет, а $\frac{1}{5}$ старше 20 лет. $\frac{4}{7}$ части участников старше 20 лет составляют женщины.

a) Какую часть всех участников составляют участники в возрасте от 15 до 20 лет?

b) Какую часть всех участников составляют мужчины старше 20 лет?

РЕШЕНИЕ

a) Искомая часть $=1-\frac{1}{4}-\frac{1}{5}$

$$=\frac{20-5-4}{20}$$

$$=\frac{11}{20}.$$

Участники в возрасте от 15 до 20 лет составляют $\frac{11}{20}$ частей всех участников.

b) Искомая часть $=\frac{1}{5}\times\left(1-\frac{4}{7}\right)$

$$=\frac{1}{5}\times\frac{3}{7}$$

$$=\frac{3}{35}.$$

Мужчины старше 20 лет составляют $\frac{3}{35}$ части всех участников.

17 ПРОВЕРЬТЕ СЕБЯ

$\frac{3}{8}$ части игроков сборной команды по футболу проживают в махалле Олмазор, $\frac{2}{5}$ части – в махалле Урикзор, оставшаяся часть – в махалле Бодомзор. $\frac{2}{9}$ части игроков махалли Олмазор составляют мальчики.

a) Какую часть составляют игроки из махалли Бодомзор?

b) Какую часть составляют девочки из махалли Олмазор?

B Десятичные дроби

Сложение и вычитание десятичных дробей

Расширим наши знания о сложении и вычитании десятичных дробей до отрицательных десятичных дробей.

18 ПРИМЕР

Вычислите без использования калькулятора.

a) 13,65 + 5,938 **b)** 47,3 + (−8,415) **c)** 15,2 − (−4,33)

РЕШЕНИЕ

a)

Поставьте запятые в один столбик.

```
 1 3,6 5 0
+  5,9 3 8
 1 9,5 8 8
```

Чтобы число цифр после запятых было равным, после 5 ставится 0.

Сложите цифры столбиком справа налево.

∴ 13,65 + 5,938 = 19,588

b) 47,3 + (−8,415) = 47,3 − 8,415

Поставьте запятые в один столбик.

```
 4 7,3 0 0
−  8,4 1 5
 3 8,8 8 5
```

Чтобы число цифр после запятых было равным, после 3 ставятся два 0.

Вычтите цифры столбиком справа налево.

∴ 47,3 + (−8,415) = 38,885

c) 15,2 − (−4,33) = 15,2 + 4,33

```
 1 5,2 0
+  4,3 3
 1 9,5 3
```

Правила сложения и вычитания целых чисел применимы и к рациональным числам.

∴ 15,2 − (−4,33) = 19,53

18 ПРОВЕРЬТЕ СЕБЯ

Вычислите без использования калькулятора.

a) 21,357 + 9,24 **b)** 16,054 − 8,39

c) 9,08 − (−0,96) **d)** 13 + (−2,88)

Умножение и деление десятичных дробей

Вы уже научились умножать и делить десятичные дроби на натуральные числа. Теперь научимся умножать и делить десятичные дроби на десятичные дроби.

19 ПРИМЕР

Вычислите без использования калькулятора.

a) $3{,}2 \times 4{,}7$ **b)** $1{,}348 \times (-0{,}02)$

РЕШЕНИЕ

a) **Способ 1:**

$$3{,}2 \times 4{,}7 = \frac{32}{10} \times \frac{47}{10} = \frac{32 \times 47}{10 \times 10} = \frac{1504}{100} = 15{,}04$$

Способ 2:

$$\begin{array}{r} 3{,}2 \\ \times\ 4{,}7 \\ \hline 224 \\ +1280 \\ \hline +15{,}04 \end{array}$$

Одна цифра после запятой

Одна цифра после запятой

$32 \times 7 = 224$

$32 \times 40 = 1280$

$1 + 1 = 2$ цифры после запятой

b) **Способ 1:**

$$1{,}348 \times (-0{,}02) = \frac{1348}{1000} \times \left(-\frac{2}{100}\right) = -\frac{1348 \times 2}{1000 \times 100} = -\frac{2696}{100\,000} = -0{,}026\,96$$

Способ 2:

$$\begin{array}{r} 1{,}348 \\ \times\ 0{,}02 \\ \hline 0{,}026\,96 \end{array}$$

Три цифры после запятой

Две цифры после запятой

$3 + 2 = 5$ цифр после запятой

$\therefore 1{,}348 \times (-0{,}02) = -0{,}026\,96$

Положительное число × Отрицательное число = Отрицательное число

ОБСУДИТЕ

Какую связь вы заметили между числом цифр дробной части в двух множителях и числом цифр дробной части в произведении?

ОБРАТИТЕ ВНИМАНИЕ!

«п.з.» — это сокращение от выражения «после запятой».

19 ПРОВЕРЬТЕ СЕБЯ

Вычислите без использования калькулятора.

a) $3{,}47 \times 1{,}2$ **b)** $2{,}93 \times (-0{,}07)$

20 ПРИМЕР

Вычислите без использования калькулятора.

a) $(-3{,}27) \div 0{,}3$ **b)** $(-0{,}9628) \div (-0{,}004)$

РЕШЕНИЕ

a) **Способ 1:**

$$-\frac{3{,}27}{0{,}3} = -\frac{32{,}7}{3}$$

Чтобы 0,3 записать в виде целого числа, передвиньте запятую на 1 знак вправо.

$$\begin{array}{r|l} -\ 32{,}7 & 3 \\ \hline -\ 3 & 10{,}9 \\ \quad 27 & \\ -\ 27 & \\ \hline \quad 0 & \end{array}$$

Способ 2:

$$-\frac{3{,}27}{0{,}3} = -\frac{3{,}27 \times 100}{0{,}3 \times 100} = -\frac{327}{30} = -10{,}9$$

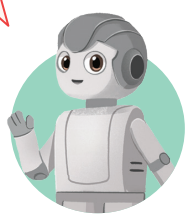
$$\begin{array}{r|l} -\ 327 & 30 \\ \hline -\ 30 & 10{,}9 \\ \quad 270 & \\ -\ 270 & \\ \hline \quad 0 & \end{array}$$

$\therefore (-3{,}27) \div 0{,}3 = -10{,}9$

Отрицательное число ÷ Положительное число = Отрицательное число

РАВНОСИЛЬНОСТЬ

Для того чтобы в дроби делитель записать в виде целого числа, нужно числитель и знаменатель дроби умножить на 10. Таким же образом, чтобы делимое в дроби $\frac{3{,}27}{0{,}3}$ записать в виде целого числа, надо числитель и знаменатель дроби умножить на 100: $\frac{327}{30}$.



b) **Способ 1:**

$$\frac{-0{,}9628}{-0{,}004} = \frac{962{,}8}{4}$$

Чтобы 0,004 выразить в виде целого числа, передвиньте запятую на 3 знака вправо.

$$\begin{array}{r} -962{,}8 \mid 4 \\ \underline{8\phantom{62{,}8}\mid 240{,}7} \\ -\ 16 \\ \underline{16} \\ -\ 28 \\ \underline{28} \\ 0 \end{array}$$

Способ 2:

$$\frac{-0{,}9628}{-0{,}004} = \frac{0{,}9628}{0{,}004} = \frac{0{,}9628 \times 10\,000}{0{,}004 \times 10\,000} = \frac{9628}{40} = 240{,}7$$

$$\begin{array}{r} -9628{,}0 \mid 40 \\ \underline{80\phantom{28{,}0}\mid 240{,}7} \\ -\ 162 \\ \underline{160} \\ -\ 280 \\ \underline{280} \\ 0 \end{array}$$

$\therefore (-0{,}9628) \div (-0{,}004) = 240{,}7$

20 ПРОВЕРЬТЕ СЕБЯ

Вычислите без использования калькулятора.

a) $(-0{,}266) \div 0{,}07$ **b)** $(-0{,}148) \div (-0{,}005)$

C Использование калькулятора

Рассмотрим возможность выполнения четырёх действий над действительными числами с использованием калькулятора.

21 ПРИМЕР

Вычислите с использованием калькулятора.

a) $(-8) \times (-3) \div (-6)^2$ **b)** $\left(-5\frac{1}{4}\right) \times \left(2\frac{1}{2}\right) \div \left(\frac{2}{3}\right)^3$ **c)** $\dfrac{\sqrt{3{,}85 + 1{,}5 \times 3}}{\sqrt[3]{4\frac{1}{3} - \frac{5}{8}}}$

РЕШЕНИЕ

	Выражение	Последовательность кнопок	Ответ
a)	$(-8) \times (-3) \div (-6)^2$	(−) 8 × (−) 3 ÷ ((−) 6) x^2 = S⇔D	$\frac{2}{3}$ 0,6666666667
b)	$\left(-5\frac{1}{4}\right) \times \left(2\frac{1}{2}\right) \div \left(\frac{2}{3}\right)^3$	■□ (−) 5 ▶ 1 ▼ 4 ▶ × ■□ 2 ▶ 1 ▼ 2 ▶ ÷ (2 ▼ 3 ▶) $x^{\square}$ 3 = S⇔D $a\frac{b}{c} \Leftrightarrow \frac{d}{c}$	$-\frac{2835}{64}$ −44,296875 $-44\frac{19}{64}$
c)	$\dfrac{\sqrt{3{,}85 + 1{,}5 \times 3}}{\sqrt[3]{4\frac{1}{3} - \frac{5}{8}}}$	√ 3.85 + 1.5 × 3 ▼ $\sqrt[3]{\square}$ 4 ▶ 1 ▼ 3 ▶ − 5 ▼ 8 =	1,866882492

ОБСУДИТЕ

При вычислении степеней чисел с использованием калькулятора есть некоторые ограничения. Попробуйте вычислить значения 3^{20}, 3^{100}, 3^{200}, 3^{300} и 3^{600}. Какие из вычислений нельзя выполнить? Что вы поняли об ограничениях калькулятора?

ОБРАТИТЕ ВНИМАНИЕ!

Кнопка S⇔D переводит обыкновенную дробь в десятичную, и наоборот, а кнопка $a\frac{b}{c} \Leftrightarrow \frac{d}{c}$ – смешанное число в неправильную дробь, и наоборот.

21 ПРОВЕРЬТЕ СЕБЯ

Вычислите с использованием калькулятора.

a) $2{,}33 \times [5{,}75 - (-1{,}68)^2]$ **b)** $\frac{5}{8} \times \left(-1\frac{1}{2}\right)^3 \div \left(-2\frac{2}{3}\right)$ **c)** $\sqrt{\frac{\left(\frac{1}{4}\right)^2 \div \sqrt[3]{8{,}89}}{-4{,}57 + 11{,}3 \times 2{,}2}}$

2.5 ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ

НАЧАЛЬНЫЙ УРОВЕНЬ

1 Выполните действия. Выразите ответ в виде несократимой дроби.

a) $\frac{1}{5} + \frac{2}{7}$ **b)** $\left(-\frac{3}{4}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right)$

c) $2\frac{3}{4} - 3\frac{11}{12}$ **d)** $-1 - \left(-\frac{5}{6}\right) + \left(-\frac{6}{5}\right)$

e) $\left(-\frac{24}{25}\right) \times \frac{45}{16}$ **f)** $\left(-\frac{7}{11}\right)^2 - \frac{7}{11}$

g) $\frac{9}{32} \times 1\frac{3}{5} \times 3\frac{1}{3}$ **h)** $\frac{\left(-4\frac{3}{8}\right)}{\left(5\frac{1}{4}\right)}$

i) $\left(-1\frac{3}{5}\right) \div \left(-1\frac{1}{3}\right)$ **j)** $3 + 2\frac{1}{2} \div \left(-1\frac{1}{4}\right)$

Проверьте ответ с использованием калькулятора.

2 Вычислите.

a) $32{,}7 + 9{,}84$ **b)** $25{,}02 - 9{,}765$

c) $11{,}47 \times 2{,}8$ **d)** $(-3{,}45) \times 1{,}06$

e) $10{,}68 \div 0{,}6$ **f)** $(-0{,}1935) \div 0{,}009$

Проверьте ответ с использованием калькулятора.

СРЕДНИЙ УРОВЕНЬ

3 Выполните действия. Выразите ответ в виде несократимой дроби.

a) $\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right) \times \left(-\frac{2}{5}\right)^2$

b) $1\frac{5}{7} \times \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{9}\right) \div \left(-1\frac{1}{4}\right)$

c) $\left(-2\frac{2}{3}\right) \times \left(-\frac{9}{8}\right) + \left(-\frac{7}{4}\right) \times \frac{2}{21}$

d) $\left[-1\frac{1}{4} - \left(-\frac{1}{6}\right)\right] \div \left[\frac{1}{3} + \left(-\frac{1}{2}\right)^3\right]$

4 Вычислите с использованием калькулятора.

a) $\sqrt{37^2 - 35^2}$ **b)** $\sqrt[3]{3375} - \left(-4\frac{1}{3}\right)^2$

c) $\left[-5\frac{3}{4} - \left(-6\frac{1}{2}\right)\right]^3$ **d)** $\frac{\sqrt{3{,}21 + 0{,}4}}{4{,}7 - 2{,}2}$

5 $\frac{1}{5}$ часть учащихся 7 класса проживают в махалле Хислат, $\frac{4}{9}$ части – в махалле Ахил. Какая часть учащихся 7 класса не проживает в махаллях Хислат и Ахил?

6 Жамол потратил $\frac{5}{8}$ частей своих денег на покупку спортивной обуви. $\frac{1}{3}$ часть оставшихся денег отдал на благотворительность. Какую часть всех денег Жамол отдал на благотворительность?

7 У Марьям есть 0,5 kg муки. Она хочет испечь торт. По рецепту ей требуется $4\frac{1}{4}$ чашки муки, по $\frac{1}{8}$ kg каждая. Хватит ли муки для торта? Если нет, сколько ещё килограммов муки потребуется?

ВЫСОКИЙ УРОВЕНЬ

8 Может ли разность двух произвольных десятичных дробей быть:

a) конечной десятичной дробью;

b) периодической дробью;

c) целым числом;

d) иррациональным числом?

Подтвердите свой ответ примерами.

9 Али, Ботир и Чарос – бизнес-партнёры. $\frac{1}{3}$ часть инвестиций принадлежит Али, а $\frac{2}{7}$ части – Ботиру.

a) Какая часть бизнеса принадлежит Чарос?

b) Какова была общая сумма инвестиций, если Али инвестировал на 6 000 000 сумов больше, чем Ботир?

10 В два одинаковых сосуда A и B налили воду. Сосуд A заполнен на $\frac{3}{7}$ части, сосуд B – на $\frac{8}{11}$ частей. Сколько частей воды надо перелить из сосуда B в сосуд A, чтобы объём жидкости в обоих сосудах стал равным?

11 открытое

Даны рациональные числа $\frac{3}{4}$ и $\frac{9}{11}$.

a) Найдите наибольшее число.

b) Найдите два рациональных числа, находящиеся между данными числами.

c) Сравните свой ответ из пункта **b)** с ответами одноклассников.

d) Сколько рациональных чисел между числами $\frac{3}{4}$ и $\frac{9}{11}$? Обоснуйте свой ответ.

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ИЗ ГЛАВЫ 2

КЛАССИФИКАЦИЯ ЧИСЕЛ

Действительные числа

$(-9; -5; 0; 0{,}4; 1{,}(3); 3; 11; \frac{3}{8}; \frac{9}{4}; 3\frac{4}{9}; -2\frac{1}{7}; \pi; \sqrt{2}; 0{,}232232223...)$

Рациональные числа
(конечные или периодические десятичные дроби)
$-9; -5; 0; 0{,}44; 1{,}(3); 3; 11; \frac{3}{8}; \frac{9}{4}; 3\frac{4}{9}; -2\frac{1}{7}$

Иррациональные числа
(непериодические бесконечные десятичные дроби)
$\pi; \sqrt{2}; 0{,}232232223...$

Целые числа

Обыкновенные дроби

Натуральные числа и 0
(0 и положительные целые числа)
Например: 0; 3;

Отрицательные целые числа
Например:

Рациональные числа

a) Рациональными числами называются действительные числа, которые можно записать в виде $\frac{a}{b}$, где a и b – целые числа и $b \neq 0$.

b) Рациональные числа состоят из [ ] десятичных дробей и [ ] десятичных дробей.

Приведите два примера рациональных чисел.

Иррациональные числа

a) Иррациональными числами называются действительные числа, которые нельзя записать в виде $\frac{a}{b}$, где a и b – целые числа и $b \neq 0$.

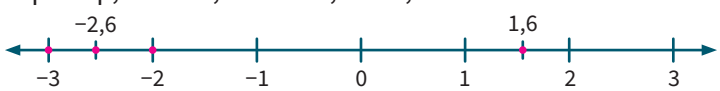
b) Иррациональные числа состоят из [ ] и [ ] десятичных дробей.

Приведите два примера иррациональных чисел.

ЧИСЛОВАЯ ОСЬ

a) Произвольное действительное число можно обозначить точкой на числовой оси.

b) Числовая ось показывает расположение действительных чисел. Каждое число на числовой оси меньше чисел, расположенных справа от него, и больше чисел, расположенных слева от него.
Например, $-3 < -2{,}6 < -2$ и $1{,}6 > -2{,}6$.



ВЫПОЛНЕНИЕ ДЕЙСТВИЙ НАД ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫМИ ЧИСЛАМИ

Выполнение действий над целыми числами

Сложение

$5 + (-8) = 5 - 8 = -3$

$(-6) + 10 = -6 + 10 = 4$

$(-3) + (-4) = -3 - 4 = -7$

Вычитание

$8 - (-3) = 8 + 3 = 11$

$(-2) - 5 = -2 - 5 = -7$

$(-5) - (-6) = -5 + 6 = 1$

Умножение

$9 \times (-2) = -18$

$(-3) \times 4 = 4 \times (-3) = -12$

$(-5) \times (-6) = 5 \times 6 = 30$

Деление

$15 \div (-3) = \frac{15}{-3} = -5$

$(-20) \div 5 = \frac{-20}{5} = -4$

$(-36) \div (-9) = \frac{-36}{-9} = 4$

Эти четыре действия можно применить для всех действительных чисел.

Порядок действий

Сначала выполните действия в скобках. Если скобок несколько пар, то начните с внутренних скобок. Затем вычислите степень и корни. Выполните умножение и деление слева направо. Выполните сложение и вычитание слева направо.

Пример:

$-7 + 3^2 \times (5 - 7) = -7 + 3^2 \times (-2)$ Выполните действия в скобках.

$= -7 + 9 \times (-2)$ Вычислите степень.

$= -7 + (-18)$ Выполните умножение.

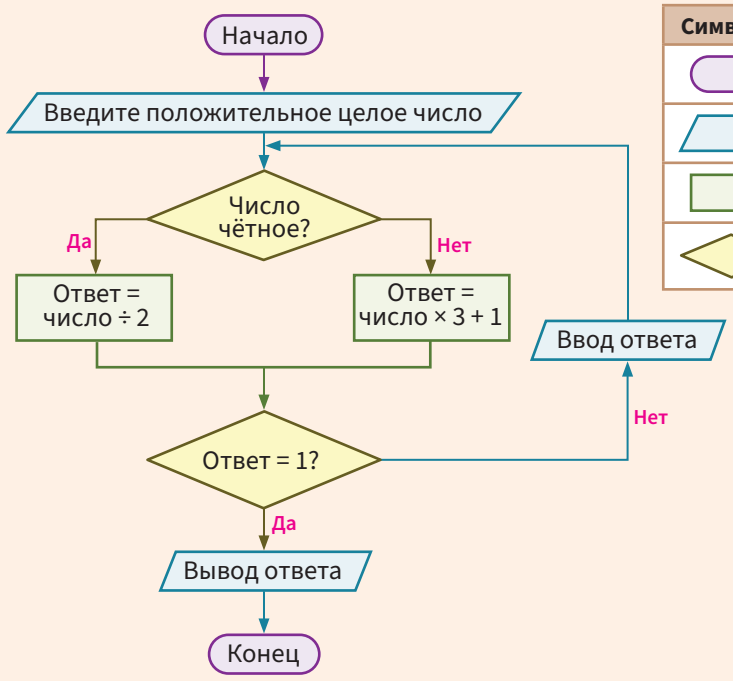
$= -7 - 18$ Выполните сложение и вычитание.

$= -25$

Скобки → Степень и корень → Умножение и деление → Сложение и вычитание

ПРОГРАММИРОВАНИЕ

На уроках информатики последовательность этапов выполнения процесса задаётся блок-схемой. Каждый этап последовательности обозначен следующими символами.



Символы	Значение
	Начало / Конец
	Ввод / Вывод
	Процесс
	Условие

1. Каким будет конец блок-схемы, если ввести числа:
   a) 2, **b)** 5, **c)** 12.
2. Можете ли вы составить блок-схему, выводящую все простые числа от 1 до 100?

ЭТО ИНТЕРЕСНО!

Блок-схема представляет собой последовательность вычислений в соответствии с гипотезой Коллатца, созданной математиком Лотаром Коллатцем в 1937 году. В ней говорится, что любое положительное число в результате алгоритма действий, описанного в блок-схеме, всегда будет равно 1.

ПОВТОРЕНИЕ ГЛАВЫ 2

1 **a)** Вычислите без использования калькулятора $(-2)^2$ и $\left(\frac{7}{6}\right)^2$.

b) Обозначьте на числовой оси: -2, $\frac{7}{6}$, $(-2)^2$ и $\left(\frac{7}{6}\right)^2$.

c) Запишите неравенство, связывающее числа -2 и $\frac{7}{6}$.

d) Запишите неравенство, связывающее числа $(-2)^2$ и $\left(\frac{7}{6}\right)^2$.

2 Вычислите без использования калькулятора.

a) $(-16) \times (-3) - (-8) \times 5$

b) $[-2 + (-7)]^3$

c) $3\frac{1}{2} \times \left(-5\frac{1}{7}\right) \div \left(1\frac{4}{5}\right)$

d) $\frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{8}\right)^2$

e) $\left(-2\frac{1}{2}\right) - \left[\left(-\frac{1}{2}\right)^3 - \frac{1}{4}\right] \times \left(-2\frac{2}{3}\right)$

f) $\left[1\frac{1}{2} - \left(-8\frac{1}{3}\right) \times \left(-1\frac{1}{5}\right)\right] \div \left(-1\frac{2}{15}\right)$

g) $3{,}2 \div (-1{,}6) + (-0{,}8) \times (-5)$

h) $(-1{,}2)^2 \times 100 \div \left[-\frac{1}{3} + \left(-\frac{1}{6}\right)\right]$

3 Вычислите с использованием калькулятора.

a) $\frac{3\frac{2}{3} - \left(-\frac{4}{11}\right)}{\sqrt{8} \div \sqrt[3]{4}}$

b) $-\left(1\frac{1}{9}\right)^2 + \left(0{,}6 - \frac{2}{3}\right) \div 2\frac{1}{6}$

c) $\left(-3\frac{1}{8} + 1\frac{1}{6} - 3\frac{1}{4}\right) \times \left(-\frac{2}{5}\right)^2$

4 Какие из следующих значений всегда отрицательные? Если значение не всегда отрицательное, приведите контрпример.

a) Положительное число + Отрицательное число

b) Положительное число × Отрицательное число

c) Отрицательное число ÷ Отрицательное число

d) $\sqrt[3]{\text{Отрицательное число}}$

5 Инспектор по качеству измеряет объём 6 пакетов сока. Каждый пакет должен содержать 375 ml сока. В таблице представлены результаты проверки.

Порядковый номер пакета	Количество недостающего или превышающего объёма (ml)
1	−5
2	+12
3	−5
4	−9
5	+7
6	−2

a) Определите пакет с наибольшим объёмом сока.

b) Найдите общий объём 6 пакетов.

6 На турнире по гольфу участвуют 4 игрока. Очки по трём турам (число ударов, большее или меньшее стандартного значения) представлены в следующей таблице.

	Али	Бек	Чарос	Дониёр
Тур 1	−5	+3	+10	−3
Тур 2	−1	−2	+2	−4
Тур 3	−2	−1	−3	+5

a) Кто набрал наименьшее число очков в туре 1?

b) Найдите число очков, набранных каждым игроком за три тура.

c) В турнире выиграл игрок, набравший наименьшее количество баллов. Кто выиграл?

7 Жидкий воздух состоит из смеси жидкого азота и жидкого кислорода. Температура кипения азота составляет −196 °C, а температура кипения кислорода составляет −183 °C. Какой газ начнёт испаряться первым при нагревании жидкого воздуха, начиная с отметки −210 °C? Обоснуйте свой ответ.

8 **a)** Самолёт летит на высоте 324 m выше уровня моря, а рыба плывёт на глубине 58 m ниже уровня моря. Найдите расстояние между самолётом и рыбой.

b) На какой высоте от уровня моря находится птица, если она летит посередине между самолётом и рыбой?

9 На полке $\frac{3}{8}$ части книг составляют книги по биологии, $\frac{1}{3}$ часть – по химии и оставшаяся часть – по физике.

a) Какую часть всех книг составляют книги по физике?

b) Запишите получившееся число в виде десятичной дроби.

c) Сколько всего книг на полке, если число книг по физике равно 10?

10 Нодир при преобразовании периодической дроби в обыкновенную дробь использовал следующий способ:

$\bigstar = 0,(7)$

Тогда $10\bigstar = 7,(7).$

Следовательно, $9\bigstar = 7$

$\bigstar = \frac{7}{9}$

Так как первоначально $\bigstar = 0,(7)$, то

$\therefore 0,(7) = \frac{7}{9}$

Используя этот способ, преобразуйте следующие периодические дроби в обыкновенную дробь.

a) 0,(8) **b)** 0,(95)

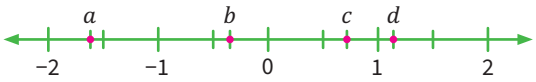
11 Найдите такое наибольшее отрицательное целое число, при умножении которого на $-\frac{1}{3}$, $-\frac{2}{8}$ и $-\frac{6}{12}$ получится положительное целое число.

12 Триатлон состоит из плавания, велогонки и бега на разные дистанции. Участник должен $\frac{20}{103}$ частей всего пути пробежать, расстояние, в 4 раза большее, проехать на велосипеде и проплыть 1,5 km.

a) Какую часть всего пути участник должен проплыть?

b) Найдите общее расстояние.

13 На числовой оси обозначены числа a, b, c и d.



Обозначьте пары чисел, удовлетворяющих следующим условиям:

a) их сумма – наибольшее число;

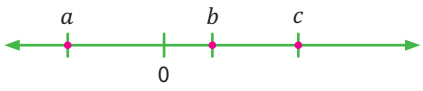
b) их разность – наименьшее число;

c) их произведение ближе к 0;

d) их отношение – наибольшее положительное число.

14 На числовой оси обозначены числа a, b и c.

a) Определите, какими будут значения следующих выражений: положительными или отрицательными. Обоснуйте свой ответ.



1) $a \times c$ **2)** $b \times c$

3) $\frac{a}{b}$ **4)** $b \div \sqrt{c} \times a$

b) Дано число $c > 1$. Покажите на числовой оси возможное расположение $a \times c$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Запишите этапы (шаги) нахождения НОД и НОК двух чисел, связанные с использованием разложения числа на простые множители. Используйте примеры, которые помогут при объяснении. Приведите один пример использования НОД и НОК в повседневной жизни.



ГЛАВА 3

Приближённое значение числа и прикидка (оценка)

3.1 Округление натуральных чисел до заданного разряда

3.2 Округление чисел до значащей цифры

3.3 Прикидка (оценка)

На Азиатских играх 2023 года, прошедших в Китае, спортсмены Республики Узбекистан заняли 5-е место в общекомандном зачёте. В частности, наша спортсменка Ольга Забелинская, участвовавшая в велопрограмме, завоевала золотую медаль. Наша соотечественница зафиксировала время 24,37 минуты на дистанции 18,3 km.

Обратите внимание на точность приборов, используемых для измерения времени гонок. Значение 24,37 приближённое или точное? Почему мы часто используем округление и прикидку (оценку) в повседневной жизни?

В этой главе мы изучим:

- нахождение приближённого значения чисел через округление следующим образом:
  - до разряда единиц, десятков, сотен и т. д.;
  - до одной цифры после запятой и до двух цифр после запятой;
  - до значащей цифры;
- округление через прикидку (оценку);
- использование прикидки в жизненных ситуациях.

3.1 ОКРУГЛЕНИЕ НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ ДО ДАННОГО РАЗРЯДА

КЛЮЧЕВЫЕ ТЕРМИНЫ

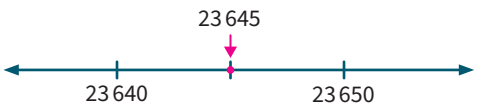
- приближённое значение
- округление
- степень точности
- серединная точка
- округление с избытком
- округление с недостатком

Правила округления

Округление – это нахождение соответствующего значения величины по степени точности. **При округлении** целых чисел до ближайших десятков, сотен и тысяч **степень точности** для каждого результата будет разной. Для округления чисел мы можем использовать числовую ось.

Округлите число 23 645 до ближайших: **a)** десятков, **b)** сотен, **c)** тысяч.

a)



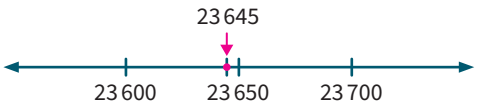
На числовой оси число 23 64**5** является серединой между числами 23 640 и 23 650. Согласно правилу, 23 645 округлим до 23 650.

23 645 ≈ 23 650 или

запишем: 23 645 = 23 650 (округлено до разряда десятков)

Степень точности

b)



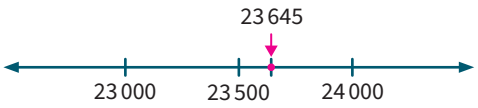
Число 23 6**4**5 ближе к числу 23 600, чем к 23 700. Округлим 23 645 до 23 600.

23 645 ≈ 23 600 или

запишем: 23 645 = 23 600 (округлено до разряда сотен)

Степень точности

c)



Число 23 **6**45 ближе к 24 000, чем к 23 000. Округлим 23 645 до 24 000.

23 645 ≈ 24 000 или

запишем: 23 645 = 24 000 (округлено до разряда тысяч)

Степень точности

Из процесса округления чисел делаем следующие выводы:

Округление чисел до ближайших...	Цифра в разряде	Цифра 5 или больше 5	Меньше цифры 5
10	Цифра в разряде единиц	Округление с избытком	Округление с недостатком
100	Цифра в разряде десятков	Округление с избытком	Округление с недостатком
1000	Цифра в разряде сотен	Округление с избытком	Округление с недостатком

При округлении чисел до определённого разряда:

- **Посмотрите на цифру обозначенного разряда.**
- **Посмотрите на цифру, стоящую справа от найденной цифры: если это цифра 5 или больше 5, то округляйте с избытком; если меньше 5, то округляйте с недостатком.**

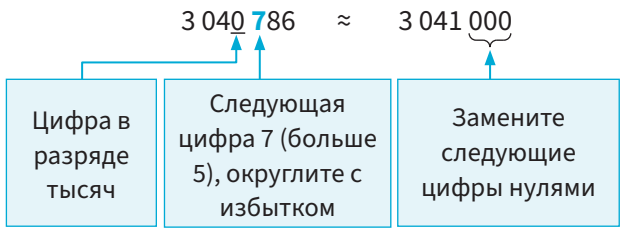
1 ПРИМЕР

Население города Ташкента в январе 2024 года составляло 3 040 786 человек. Округлите это число до:

a) разряда тысяч **b)** разряда миллионов

РЕШЕНИЕ

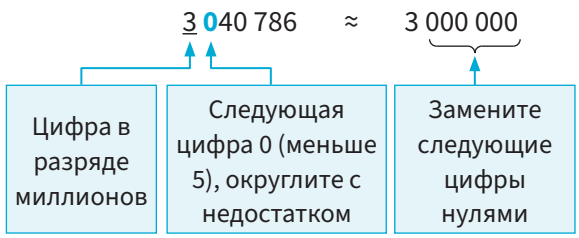
a) Посмотрите на разряд тысяч. В разряде тысяч числа 3 040 786 стоит цифра 0.



3 040 786 = 3 041 000 (округлено до разряда тысяч)

Степень округления

b) Посмотрите на разряд миллионов. В разряде миллионов числа 3 040 786 стоит цифра 3.

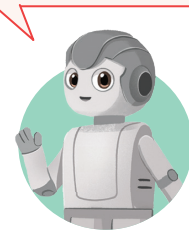


3 040 786 = 3 000 000 (округлено до разряда миллионов)

Степень округления

ОБОЗНАЧЕНИЯ

Знак ≈ означает «приблизительно равно». В этом случае необязательно показывать степень точности. Но знак = означает «точно равно». Поэтому при записи ответа со знаком = в скобках надо указать степень точности приближённого значения. Знание того, что означает каждая запись и знание правил её использования облегчают математические вычисления.



1 ПРОВЕРЬТЕ СЕБЯ

Число новорождённых в Узбекистане в 2022 году составило 932 192 человека. Округлите это число до:

a) разряда десятков **b)** разряда сотен **c)** разряда десятков тысяч

ПОДУМАЙТЕ

Учащийся округлил число 5 610 475 до разряда тысяч в трёх действиях.

5 610 475 = 5 610 480 (до разряда десятков)

5 610 480 = 5 610 500 (до разряда сотен)

5 610 500 = 5 611 000 (до разряда тысяч)

Правильно ли он выполнил округление? Обоснуйте свой ответ.

Округление десятичных дробей до определённого разряда после запятой

Используя правила округления до целых чисел, можно округлить десятичные дроби по следующим правилам:

Округление чисел до указанного разряда после запятой	Цифра в разряде, на которую надо обратить внимание	Цифра 5 или больше 5	Меньше цифры 5
До 1-го разряда	Цифра в разряде сотых	Округление с избытком	Округление с недостатком
До 2-го разряда	Цифра в разряде тысячных	Округление с избытком	Округление с недостатком
До 3-го разряда	Цифра в разряде десяти-тысячных	Округление с избытком	Округление с недостатком

При округлении десятичных дробей до определённого разряда после запятой:

- **Посмотрите на цифру обозначенного разряда после запятой.**
- **Посмотрите на цифру, стоящую справа от этой цифры: если это цифра 5 или больше 5, то округлите с избытком; если меньше 5, то округлите с недостатком.**

2 ПРИМЕР

Округлите число 8,4695.

a) до целого; **b)** до 1-го разряда после запятой;
c) до 2-го разряда после запятой; **d)** до тысячных.

РЕШЕНИЕ

a) Посмотрите на разряд единиц.
В разряде единиц числа 8,4695 стоит цифра 8.

8,4695 ≈ 8

Цифра в разряде единиц

Цифра 4 меньше 5. Округлите число с недостатком

8,4695 = 8 (округлено до целого)

b) Посмотрите на цифру в разряде десятых.
В разряде десятых числа 8,4695 стоит цифра 4.

8,4695 ≈ 8,5

Цифра в разряде десятых

Цифра 6 больше 5. Округлите с избытком

8,4695 = 8,5 (округлено до первого разряда после запятой)

Цифры после разряда десятых не пишутся.

ОБРАТИТЕ ВНИМАНИЕ!

Степень точности округления можно сформулировать так: до первой цифры после запятой – до десятых; до второй цифры после запятой – до сотых; до третьей цифры после запятой – до тысячных и т. д.

c) Посмотрите на цифру в разряде сотых.
В разряде сотых числа 8,4695 стоит цифра 6.

8,4695 ≈ 8,47

Цифра в разряде сотых

Цифра 9 больше 5. Округлите с избытком

8,4695 = 8,47 (округлено до сотых)

Цифры после разряда сотых не пишутся.

d) Посмотрите на цифру в разряде тысячных.
В разряде тысячных числа 8,4695 стоит цифра 9.

8,4695 ≈ 8,470

Цифра в разряде тысячных

Цифра равна 5. Округлите с избытком

Цифры после разряда тысячных не пишутся.

8,4695 = 8,470 (округлено до тысячных)

Памятка Чтобы показать, что число округлено до разряда тысячных, к разряду тысячных приписывается цифра 0.

ОБРАТИТЕ ВНИМАНИЕ!

Сравнив пункты c) и d) в примере 2, мы видим, что, округлив 8,4695 до 3-го разряда после запятой, полученное значение 8,470 будет более точным, чем 8,47, округлённое до сотых. Таким образом, приближённое значение, округлённое до большего количества десятичных знаков, будет иметь более высокую степень точности.

2 ПРОВЕРЬТЕ СЕБЯ

Округлите число 9,00350.

a) **1)** до десятых; **2)** до сотых;
3) до 3-го разряда после запятой; **4)** до десятитысячных.

b) Равны ли ответы **1)** и **2)** из пункта **(a)**? Обоснуйте свой ответ.

3 ПРИМЕР

a) Вычислите: $3\frac{4}{7} \times \left(-2\frac{1}{15}\right)$.

b) Округлите ответ до 4-го разряда после запятой.

РЕШЕНИЕ

a) $3\frac{4}{7} \times \left(-2\frac{1}{15}\right) = \frac{25}{7} \times \left(-\frac{31}{15}\right)$

$= -\frac{155}{21}$

$= -7\frac{8}{21}$

b) $-7\frac{8}{21} = -7 - \frac{8}{21}$

$= -7 - 0,(380952)$

$= -7,(380952)$

$= -7,3810$ (округлено до 4-го разряда после запятой)

ОБРАТИТЕ ВНИМАНИЕ!

Проверьте:

Нажмите 3 4 7 2 1 15

Ответ: $-7\frac{8}{21}$.

3 ПРОВЕРЬТЕ СЕБЯ

a) Вычислите: $3\frac{7}{11} \times \left(-1\frac{9}{20}\right)$

b) Округлите ответ до 4-го разряда после запятой.

4 ПРИМЕР

Длина первого прямоугольника равна 3,85 dm, а ширина – 2,07 dm. Длина второго прямоугольника – 29,90 dm, а ширина – 0,735 dm. Сколько понадобится бумаги, чтобы покрыть площадь этих прямоугольников? Выразите ответ с точностью до:

a) квадратного дециметра; **b)** квадратного сантиметра.

РЕШЕНИЕ

a) Общая площадь бумаги для покрытия = (3,85 × 2,07) + (29,90 × 0,735)
= 7,9695 + 21,9765
= 29,9460 (dm^2)
= 30 dm^2 (округлено до квадратных дециметров)

b) Общая площадь бумаги для покрытия = 29,9460 (dm^2)
= 29,9460 × 100
= 2994,60 cm^2
= 2995 cm^2 (округлено до квадратных сантиметров)

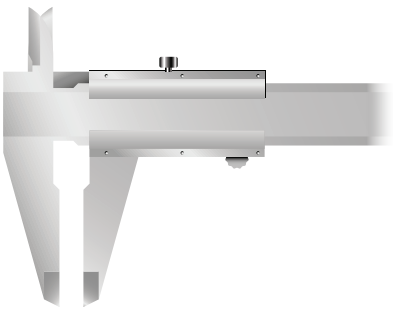
Памятка Когда единицей измерения является квадратный дециметр, выражение «округлено до ближайших квадратных сантиметров» эквивалентно выражению «округлено до 2 знаков после запятой», так как 1 $см^2$ = 0,01 $дм^2$.

4 ПРОВЕРЬТЕ СЕБЯ

Лола купила 8 упаковок фруктового сока и 3 пачки сливочного масла. Масса упаковки фруктового сока составляет 1,08 kg, а масса пачки сливочного масла – 0,25 kg. Какова общая масса покупки? Выразите ответ с точностью до:

a) килограммов **b)** граммов

5 ПРИМЕР



Штангенциркуль – это инструмент, измеряющий длину с точностью до 0,1 mm. Юсуф измерил диаметр карандаша с помощью штангенциркуля и записал его значение как 6 mm (округлив до целого числа). Найдите:

a) наибольшее возможное значение диаметра карандаша **b)** наименьшее возможное значение диаметра карандаша

РЕШЕНИЕ

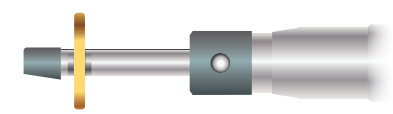
a) Наибольшее значение диаметра карандаша при измерении штангенциркулем равно 6,4 mm.

Памятка После запятой есть одна цифра. После числа 6,4 следующее число с одной цифрой после запятой – число 6,5. Но это число при округлении будет равным 7.

b) Наименьшее значение диаметра карандаша при измерении штангенциркулем равно 5,5 mm.

Памятка После запятой есть одна цифра. До числа 5,5 предшествующее число с одной цифрой после запятой – число 5,4. Но это число при округлении будет равным 5.

5 ПРОВЕРЬТЕ СЕБЯ



Микрометр – это инструмент, измеряющий длину с точностью до 0,01 mm. Жамшид измерил толщину монеты с помощью микрометра и записал её значение как 1,6 mm (округлив до разряда десятых). Найдите:

a) наибольшее возможное значение толщины монеты **b)** наименьшее возможное значение толщины монеты

3.1 ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ

НАЧАЛЬНЫЙ УРОВЕНЬ

1 Округлите числа до целых.
a) 13,4 **b)** 321,8

2 Округлите числа до сотен.
a) 7289 **b)** 13 562

3 Округлите числа до 1-го разряда после запятой.
a) 23,69 **b)** 0,72

4 Округлите числа до 2-го разряда после запятой.
a) 10,7543 **b)** 2,9968

5 Округлите числа до 3-го разряда после запятой.
a) 0,04025 **b)** 17,92653

6 Округлите числа до 4-го разряда после запятой.
a) 3,004056 **b)** 18,471984

СРЕДНИЙ УРОВЕНЬ

7 **a)** Вычислите: $(-13) \times [(-17) + (-12)]$
b) Округлите ответ до десятков.

8 Вычислите. Округлите ответ до 3-го разряда после запятой.
a) $\frac{2}{3} \times (-8 + 12)$ **b)** $4\frac{1}{7} - 5\frac{1}{8}$
c) $-4\frac{2}{9} \div 1\frac{7}{12}$ **d)** $\frac{\sqrt{17^2 - 8^2}}{13}$

9 Вместимость водохранилища составляет 27 800 000 m^3. Округлите это число до миллионов m^3.

10 Площадь дома составляет 84,5 m^2.
a) Округлите это значение до:
1) 1 m^2, **2)** 10 m^2.
b) Какова цена одного квадратного метра, если цена всего дома составляет 725 000 000 сумов? Округлите получившееся значение до сумов.

11 Рабочий измерил высоту детали штангенциркулем и записал ответ: 2,1036 cm.
a) Округлите это значение:
1) до 1-го разряда после запятой,
2) до 2-го разряда после запятой.
b) Какое из округлений в пункте **a)** точнее? Обоснуйте свой ответ.

ВЫСОКИЙ УРОВЕНЬ

12 Натуральное число n, округлённое до десятков, равно 920.
a) Число a на числовой оси будет серединой между 910 и 920, а число b – серединой между 920 и 930.



1) Найдите значения a и b.
2) Найдите наибольшее и наименьшее значения n.
b) Если n – это десятичная дробь с одной цифрой после запятой, то каким будет ответ **a) 2)**?

13 Население Самарканда в 2023 году составило 573 200 человек (округлено до сотен). Найдите:
a) наибольшее возможное число населения Самарканда в том году,
b) наименьшее возможное число населения Самарканда в том году.

14 Время забега Мансура на дистанцию 100 m было зафиксировано с помощью хронометра. Хронометр зафиксировал время 11,96 s (округлено до 2-го разряда после запятой). Найдите наибольшее значение времени, если степень точности хронометра составляет:
a) 0,001 s **b)** 0,0001 s

15 Верны ли следующие утверждения? Обоснуйте свой ответ.

a) 0,959 = 1 (округлено до десятых)

b) 508,66 = 51 (округлено до десятков)

c) 14,235 = 14,035 (округлено до десятых)

d) 90,92 = 100 (округлено до сотен)

16 открытое

Число округлили и получили 38 000.

a) Найдите возможную степень точности округления.

b) Запишите точное значение числа, соответствующего каждой возможной степени точности из пункта **a)**.

17 открытое

Солиха положила 25 монет друг на друга и определила общую высоту столбца, равную 58 mm. Затем разделила полученное значение на 25.

a) Вычислите этим методом толщину монеты с точностью до 0,1 mm.

b) Метод Солихи точнее, чем вычисление толщины одной монеты и последующее её умножение на число монет? Обоснуйте свой ответ.

c) Солиха хочет определить массу монеты с помощью столовых весов. Как она это сделает?

3.2 ОКРУГЛЕНИЕ ЧИСЕЛ ДО ЗНАЧАЩЕЙ ЦИФРЫ

АКТИВИЗИРУЮЩЕЕ ЗАДАНИЕ 1

Цель: определение соответствующей степени точности чисел.

1 Точная толщина стекла составляет 0,004503 m.

a) Округлите толщину стекла до 2-го разряда после запятой.

b) Имеет ли значение для мастера округлённое значение из пункта **a)**? Почему?

c) Предложите правильное оценивание толщины стекла, значимое для мастера.

2 Постоянное население города Ташкента на 1 января 2024 года составило 3 040 786 человек.

a) Предложите правильное оценивание количества населения.

b) Обсудите с одноклассниками, почему ваш способ оценивания правильнее.

КЛЮЧЕВЫЕ ТЕРМИНЫ

- значащая цифра (з. ц.)
- цифра, отличная от нуля

С помощью **активизирующего задания 1** мы определили, что, для того чтобы число было удобно использовать, его необходимо округлить соответствующим образом. Требуемая степень точности зависит не только от количества цифр после запятой. Нам нужно уметь различать важные цифры числа, то есть **значащие цифры** (з. ц.).

Значащие цифры (з. ц.) числа – это важные цифры, используемые для его округления с соответственной степенью точности. Число будет точнее, если оно дано со значащей цифрой.

Значащей цифрой числа является первая ненулевая цифра при чтении его слева направо. Эта цифра называется **первой значащей цифрой**. Следующая цифра называется **второй значащей цифрой** и так далее.

Рассмотрим некоторые правила определения значащих цифр.

Правило 1 Все **цифры, отличные от 0,** значащие цифры.

Рассмотрим, 54 332 и 0,16.



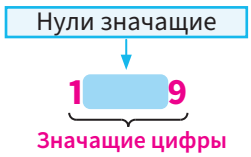
В числе 54 332 пять значащих цифр.



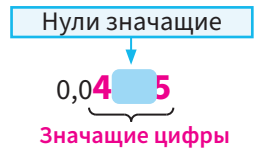
В числе 0,16 две значащие цифры.

Правило 2 Все **цифры между цифрами, отличными от 0,** значащие цифры.

Рассмотрим, 100 009 и 0,04005.



В числе 100 009 шесть значащих цифр.

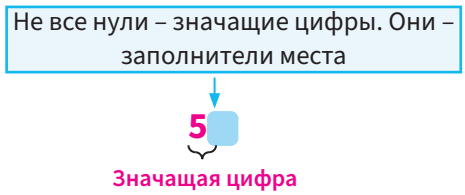


В числе 0,04005 четыре значащие цифры.

Правило 3 Для произвольного целого числа **последние нули** могут и не быть значащими цифрами. Это зависит от того, как округлено число.

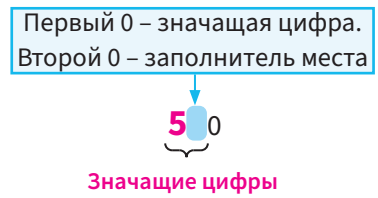
Округлим число 495 до сотен и до десятков.

495 = 500 (округлено до сотен)



В числе 500, округлённом до сотен, одна значащая цифра.

495 = 500 (округлено до десятков)

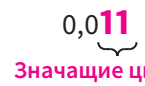


В числе 500, округлённом до десятков, две значащие цифры.

Правило 4 В произвольной десятичной дроби все **нули, предшествующие первой цифре, отличной от 0,** не являются значащими цифрами.

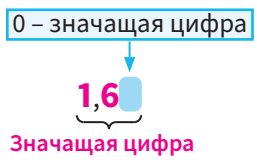


В числе 0,0008 одна значащая цифра.

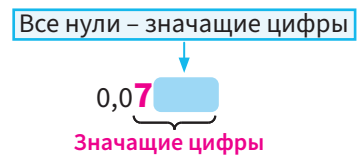


В числе 0,011 две значащие цифры.

Правило 5 В произвольной десятичной дроби **все нули после первой цифры, отличной от 0,** значащие цифры. Рассмотрим десятичные дроби 1,60 и 0,07000.



В числе 1,60 три значащие цифры.



В числе 0,07000 четыре значащие цифры.

6 ПРИМЕР

Определите количество значащих цифр.

a) **1)** 72 301 **2)** 5,038 **3)** 0,0040300

b) 49 000

РЕШЕНИЕ

a) **1)** В числе 72 301 первая цифра, отличная от 0, это 7.

7 2 3 0 1 Правило 1

7 2 3 0 1 Правило 2

∴ В числе **72 301** пять значащих цифр.

2) В числе 5,038 первая цифра, отличная от нуля, это 5.

5 , 0 3 8 Правило 1

5 , 0 3 8 Правило 2

∴ В числе **5,038** четыре значащие цифры.

3) В числе 0,0040300 первая цифра, отличная от нуля, это 4.

0,0 0 4 0 3 0 0 Правило 1

0,0 0 4 0 3 0 0 Правило 2

0,0 0 4 0 3 0 0 Правило 5

∴ В числе 0,00**40300** пять значащих цифр.

b) В числе 49 000 нули могут быть значащими или заполнителями мест. Например,

49 372 = **49** 000 (округлено до тысяч)
49 016 = **49 0**00 (округлено до сотен)
48 996 = **49 00**0 (округлено до десятков)
49 000,2 = **49 000** (округлено до целого)

Число 49 000 может иметь 2, 3, 4 или 5 значащих цифр в зависимости от округления, показанного выше.

ОБСУДИТЕ

Сколько значащих цифр в числе 50 000? Почему?

6 ПРОВЕРЬТЕ СЕБЯ

Определите количество значащих цифр.

a) **1)** 3847 **2)** 3,120 **3)** 0,050060

b) **1)** 130 000 **2)** 7900

Мы можем применить правила округления до указанных значащих цифр к целым числам.

При округлении числа до заданной значащей цифры:

- **Посмотрите на заданную значащую цифру, начиная слева.**
- **Посмотрите на следующую цифру: если это цифра 5 или больше 5, то округлите с избытком; если эта цифра меньше 5, то округлите с недостатком.**

7 ПРИМЕР

Округлите:

a) число 60 220 до двух значащих цифр;

b) число 0,008101 до трёх значащих цифр;

c) число 89,950 до трёх значащих цифр.

РЕШЕНИЕ

a) Найдите вторую значащую цифру числа.

60 220 = 60 000 (округлено до двух значащих цифр)

- 2-я значащая цифра
- Цифра 2 меньше 5. Округлите с недостатком
- Для заполнения запишите нули

b) Найдите третью значащую цифру.

0,008 101 = 0,008 10 (округлено до трёх значащих цифр)

- 3-я значащая цифра
- Цифра 1 меньше 5. Округлите с недостатком

c) Найдите третью значащую цифру.

89,950 = 90,0 (округлено до трёх значащих цифр)

- 3-я значащая цифра
- Цифра равна 5. Округлите с избытком

ОБРАТИТЕ ВНИМАНИЕ!

З. ц. – это краткая запись выражения «значащая цифра» для уточнения степени точности.

ОБСУДИТЕ

Округлите число 0,008101 до 3 з. ц. Получится ли 0,008100? Обоснуйте свой ответ.

ОБСУДИТЕ

Округлите число 99,950 до 3 з. ц. Получится ли 100,0? Обоснуйте свой ответ.

7 ПРОВЕРЬТЕ СЕБЯ

Округлите:

a) число 70 049 до трёх значащих цифр;

b) число 0,070185 до трёх значащих цифр;

c) число 0,0100 до двух значащих цифр;

d) число 0,99999 до двух значащих цифр.

8 ПРИМЕР

Дядя Санжар купил автомобиль за 128 175 200 сумов. Округлите цену автомобиля:
a) до трёх значащих цифр; **b)** до четырёх значащих цифр.

РЕШЕНИЕ

a) Цена автомобиля = 128 175 200 сумов

Три значащие цифры. Так как следующая цифра 1, округлите число с недостатком.

= 128 000 000 сумов (округлено до трёх значащих цифр)

b) Цена автомобиля = 128 175 200 сумов

Четыре значащие цифры. Так как следующая цифра 7, округлите число с избытком.

= 128 200 000 сумов (округлено до четырёх значащих цифр)

Памятка Говорим так: цена автомобиля составляет приблизительно 128 000 000 сумов.

8 ПРОВЕРЬТЕ СЕБЯ

Тохир потратил на покупку часов 1 734 500 сумов. Округлите цену часов:
a) до трёх значащих цифр; **b)** до четырёх значащих цифр.

9 ПРИМЕР

В ноябре 2023 года Ташкент посетили 2 472 650 человек. Сколько людей в среднем посетило Ташкент за один день в тот месяц? Округлите ответ до трёх значащих цифр.

РЕШЕНИЕ

Среднее количество посетителей в день =
= 2 472 650 ÷ 30 В ноябре 30 дней.
= 82 421,666 ...
= 82 400 (округлено до 3 з. ц.) человек

Памятка Говорим так: в ноябре 2023 года Ташкент в среднем за один день посетили 82 400 человек.

9 ПРОВЕРЬТЕ СЕБЯ

Плотность населения – это количество человек на 1 квадратный километр территории. В январе 2024 года население Ташкента составляло приблизительно 3,04 миллиона человек. Территория Ташкента составляет приблизительно 428,91 km^2. Найдите плотность населения Ташкента в январе 2024 года. Округлите ответ до 2 значащих цифр.

ОБСУДИТЕ

Жавохир записал 3,04 миллиона как 3 000 000 и сказал, что в этом числе 4 значащие цифры. Прав ли Жавохир? Обоснуйте свой ответ.

3.2 ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ

НАЧАЛЬНЫЙ УРОВЕНЬ

1 Определите число значащих цифр.

a) 38 **b)** 30 001

c) 15,340 **d)** 0,0249080

e) 6800 (округлено до целого)

f) 301 000 (округлено до сотен)

2 Округлите числа до значащих цифр, указанных в скобках.

a) 13,67 (1 з. ц.) **b)** 0,0392 (1 з. ц.)

c) 69 352 (3 з. ц.) **d)** 13,047 (3 з. ц.)

e) 89,9999 (4 з. ц.)

f) 8,00403625 (5 з. ц.)

СРЕДНИЙ УРОВЕНЬ

3 **a)** Выразите обыкновенную дробь $\frac{6}{7}$ в виде десятичной дроби.

b) Округлите ответ из пункта **a)** до 4 значащих цифр.

4 Вычислите: −4,937 + (−23,025). Округлите ответ до 3 значащих цифр.

5 **a)** Вычислите: $1\frac{1}{4} \times \frac{2}{9} + \left(-2\frac{1}{2}\right) \times \left(-\frac{1}{6}\right)$.

b) Выразите ответ из пункта **a)** в виде десятичной дроби, округлённой до 4 значащих цифр.

c) Найдите квадратный корень из ответа из пункта **a)**.

6 Вычислите: $\frac{0{,}049\ 23}{\sqrt[3]{23{,}56} - \sqrt{13{,}67}}$.
Округлите ответ до 2 значащих цифр.

7 В 2024 году в Ташкенте трудоустроились 1 040 786 человек.

a) Сколько значащих цифр в этом числе?

b) Округлите это число до 3 значащих цифр.

8 Общая площадь Хорезмской области составляет приблизительно 6050 km^2, а население – приблизительно 1 958 200 человек. Определите среднее количество жителей на площади 1 km^2. Округлите ответ до 3 значащих цифр.

9 Число владельцев автомобилей в 2022 и 2023 годах в Ташкенте составляло 504 160 и 502 187 человек соответственно. В 2023 году число домовладельцев в Ташкенте составило 1 289 900 человек. Найдите:

a) уменьшение числа личных автомобилей в 2023 году;

b) число автомобилей в каждом доме в 2023 году.

Округлите ответы до 3 значащих цифр.

ВЫСОКИЙ УРОВЕНЬ

10 Округлите 0,093800 до всех значащих цифр. Среди округлённых чисел найдите наибольшее.

11 Рост Жасура 162,80 cm.

a) Сколько значащих цифр в этом числе?

b) Выразите рост Жасура в метрах.

1) Найдите число значащих цифр в значении, выраженном в метрах.

2) Округлите ответ до 3 значащих цифр.

c) Как изменится степень точности при переходе от сантиметров к метрам? Почему?

12 открытое При округлении числа до 3 значащих цифр получили 0,0506. Найдите три возможных значения первоначального числа.

13 В 2024 году население Сурхандарьинской области составило 2 800 000 человек (округлено до 3 з. ц.). Найдите:

a) наибольшее возможное число населения Сурхандарьинской области;

b) наименьшее возможное число населения Сурхандарьинской области.

14 Измерения пола составляют 6,7 m и 3,8 m (округлено до 2 з. ц.). Может ли площадь пола быть равной 27 m^2 (округлено до 2 з. ц.)? А 25 m^2? Обоснуйте свой ответ.

3.3 ПРИКИДКА (ОЦЕНКА)

КЛЮЧЕВЫЕ ТЕРМИНЫ

- прикидка
- способы прикидки
- групповое значение
- шаблонные измерения
- способ разбора-сбора (декомпозиция-рекомпозиция)
- промежуточные погрешности

В случаях, когда не знаем точного значения, мы используем прикидку (оценку).
Прикидка – это процесс нахождения приближённого значения числа или величины.
В этом разделе мы рассмотрим способы использования прикидки в повседневной жизни.

A Прикидка (оценка) чисел

В жизни мы сталкиваемся со случаями, когда нужно посчитать сумму с помощью прикидки, так как под рукой нет калькулятора. Рассмотрим некоторые способы прикидки, помогающие выполнять более точные округления.

АКТИВИЗИРУЮЩЕЕ ЗАДАНИЕ 2

Цель: изучение способов прикидки чисел.

Работайте в группах. Обсудите способы прикидки, которые можно использовать в следующих случаях. Сравните свои способы прикидки со способами других групп.

Ситуация 1

Мадина хочет купить 1 пакет молока, 1 упаковку кукурузных хлопьев и 4 булочки. У неё имеется 30 000 сумов.



Без использования калькулятора, с помощью прикидки вычислите, достаточно ли у Мадины денег для этой покупки.

Ситуация 2

1180 учащихся собрались поехать на экскурсию на автобусе. Вместимость автобуса – 40 человек. Без использования калькулятора, с помощью прикидки вычислите необходимое число автобусов для экскурсии.

Ситуация 3

Заработные платы 5 работников предприятия равны 3 150 000 сумов, 2 980 000 сумов, 3 040 000 сумов, 2 890 000 сумов и 2 950 000 сумов соответственно. Без использования калькулятора, с помощью прикидки вычислите общую заработную плату 5 работников.

Один из способов прикидки значения числа – это округление числа с недостатком или с избытком. В каких ситуациях **активизирующего задания 2** вы можете воспользоваться этим способом?

При оценке суммы чисел, в тех случаях, когда значения чисел близки друг к другу, мы можем вместо каждого числа выбрать их **групповое значение**. Групповое значение можно выбрать, оценив среднее арифметическое данных чисел.

В **ситуации 3** заработная плата каждого работника составляет приблизительно 3 000 000 сумов. Таким образом, за групповую стоимость мы можем принять 3 000 000 сумов. Оценочная заработная плата 5 работников = 3 000 000 сумов x 5 = 15 000 000 сумов.

10 ПРИМЕР

194 сотрудника компании приглашены работодателем в кино. Цена 1 билета составляет 9800 сумов. Хватит ли 2 000 000 сумов на покупку билетов для всех сотрудников? Обоснуйте свой ответ.

РЕШЕНИЕ

Числа можно округлить следующим образом:
9 800 сумов ≈ 10 000 сумов, 194 ≈ 200

Прикидка общей стоимости билетов = 200 × 10 000 сумов
= 2 000 000 сумов

И число сотрудников, и цена билетов округлены с избытком, поэтому точная цена будет меньше 2 000 000 сумов. Значит, для покупки всех билетов 2 000 000 сумов будет достаточно.

10 ПРОВЕРЬТЕ СЕБЯ

Порция обеда стоит 39 900 сумов. На обед пригласили 56 человек.
Без использования калькулятора определите, превысит или не превысит сумма за оплату обеда отметку в 2 500 000 сумов. Обоснуйте свой ответ.

11 ПРИМЕР

Гульнур хочет купить некоторые товары в интернет-магазине в рамках специальной акции. По условиям акции, если она потратит 200 000 сумов, то покупку доставят бесплатно. Она хочет купить следующие товары. Будет ли у неё бесплатная доставка? Обоснуйте свой ответ.



РЕШЕНИЕ

Цены округлим с недостатком до десятков тысяч сумов следующим образом:

39 500 сумов ≈ 30 000 сумов, 12 000 сумов ≈ 10 000 сумов;

139 000 сумов ≈ 130 000 сумов, 45 000 сумов ≈ 40 000 сумов.

Прикидочная стоимость четырёх товаров = 30 000 сумов + 10 000 сумов +

130 000 сумов + 40 000 сумов = 210 000 сумов > 200 000 сумов.

Так как округляли с недостатком и прикидочная стоимость больше 200 000 сумов, то точная цена покупки будет больше 200 000 сумов. Гульнур может воспользоваться бесплатной доставкой.

ОБСУДИТЕ

Дониёр хочет купить два товара в интернет-магазине в рамках специальной акции. Цены товаров:
109 500 сумов
и 99 500 сумов.

Округлив каждую цену с недостатком следующим образом, он прикинул общую сумму:

109 500 сумов ≈
100 000 сумов,

99 500 сумов ≈
90 000 сумов.

Общая сумма:

= 100 000 сумов +
90 000 сумов

= 190 000 сумов <
200 000 сумов.

Означает ли это, что он не может воспользоваться бесплатной доставкой? Обоснуйте свой ответ.

11 ПРОВЕРЬТЕ СЕБЯ

Тётя Малика купила 110 чехлов для телефона по 36 000 сумов. Она продала их по 89 500 сумов каждый. Без использования калькулятора определите, превысит или не превысит доход от продажи чехлов отметку в 5 000 000 сумов. Обоснуйте свой ответ.

12 ПРИМЕР

Рост пяти баскетболистов: 179 cm, 183 cm, 184 cm, 175 cm и 182 cm.
Вычислите с помощью прикидки:

a) общий рост пяти баскетболистов;

b) средний рост баскетболистов.

РЕШЕНИЕ

a) 179 + 183 + 184 + 175 + 182
≈ 180 + 180 + 180 + 180 + 180 Групповое значение примите ≈180 cm.
= 180 × 5
= 900
∴ Общий рост пяти баскетболистов равен 900 cm.

b) Средний рост баскетболистов ≈ 180 cm. Групповое значение.

Памятка Групповое значение представляет собой прикидку среднего арифметического заданных чисел.



ПОДУМАЙТЕ

В каком из следующих случаев лучше всего прикинуть сумму чисел, используя понятие группового значения? Обоснуйте свой ответ.

a) 31, 32, 28, 33, 27; **b)** 4, 15, 3, 59, 30.

12 ПРОВЕРЬТЕ СЕБЯ

Дана масса шестерых детей: 53 kg, 56 kg, 61 kg, 52 kg, 59 kg и 54 kg.

Используя понятие группового значения, вычислите с помощью прикидки:

a) общую массу детей; **b)** среднюю массу детей.

B Измерение с помощью прикидки

Мы часто используем специальные инструменты для измерения длины и расстояния. Как мы можем оценить измерения без этих инструментов?

Изучим несколько способов измерений с помощью прикидки.

АКТИВИЗИРУЮЩЕЕ ЗАДАНИЕ 3

Цель: освоение способов измерения с помощью прикидки.

Работайте в группах.

Рассмотрим следующие ситуации. Обсудите способы, которые можно использовать для измерения с помощью прикидки. Поделитесь своими способами прикидки и сравните их со способами других групп.

Ситуация 1

a) 1)



Оцените длину отрезка AB на глаз.

2) Укажите другой способ оценки длины AB.

3) Сравните значения в **1)** и **2)**. Что вы заметили?

b) 1) Измерьте длину AB с помощью линейки.

2) Близки ли ответы из пунктов **a1)** и **a2)** к точному значению AB?

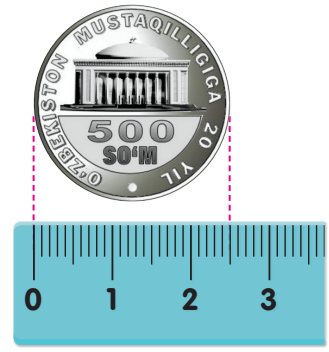
Ситуация 2

Предложите способ измерения длины кабинета с помощью прикидки.

Ситуация 3

Предложите способ измерения с помощью прикидки высоты 25-этажного дома, используя значение высоты между двумя этажами.

В расчётах мы часто используем **шаблонные (эталонные) меры**. Например, в **ситуации 1** для прикидки длины отрезка AB в качестве шаблонной меры мы можем использовать монету номиналом 500 сумов, диаметр которой равен 2,5 cm.



В **ситуации 2** для измерения длины кабинета в качестве шаблонной меры мы можем использовать длину пяди или шага.

Но объект можно измерить и без шаблонной меры – путём разделения его на несколько частей. В подобном случае перед измерением объекта мы с помощью прикидки оцениваем каждую его часть. Этот способ называется способом **разбора-сбора** (декомпозиции-рекомпозиции).

В **ситуации 3**, если предположить, что высота между двумя этажами составляет 3 m, то её можно оценить следующим образом: оценочная высота 25-этажного дома = 25 × 3 = 75 m.

ЭТО ИНТЕРЕСНО!

В Древнем Египте в качестве меры измерения длины использовался кубит. Кубит – это расстояние от локтя человека до кончика среднего пальца.

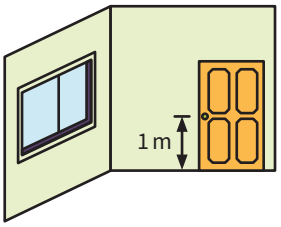


13 ПРИМЕР

Согласно чертежу, дверная ручка находится на высоте 1 m от пола. Оцените следующее:

a) высоту двери;

b) высоту потолка.



РЕШЕНИЕ

a) Примем за шаблонную меру высоту дверной ручки от пола.

Высота двери:

≈ в 2 раза больше высоты дверной ручки от пола.

$= 2 \times 1$

$= 2$ m

b) Высота потолка:

≈ в 3 раза больше высоты дверной ручки от пола.

$= 3 \times 1$

$= 3$ m

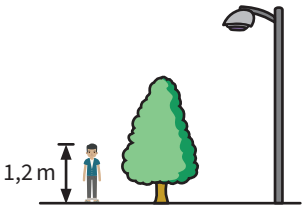
13 ПРОВЕРЬТЕ СЕБЯ

На рисунке изображён мальчик, рост которого равен 1,2 m.

Найдите:

a) высоту дерева;

b) высоту фонарного столба.



14 ПРИМЕР

Вдоль одной стены здания расположены 3 магазина. Определите длину стены здания, если длина каждого магазина составляет приблизительно 4 m.

РЕШЕНИЕ

Длина стены здания = общая длина магазинов

≈ 3 × длина магазина

≈ 3 × 4

= 12 m

14 ПРОВЕРЬТЕ СЕБЯ

На столе стоит стопка из 10 книг. Определите высоту стопки, если толщина каждой книги составляет приблизительно 2 cm.



C Оценка результатов расчёта

Иногда при вычислении значения числового выражения с использованием калькулятора получается неправильный ответ. Это происходит тогда, когда вы нажимаете другую кнопку или другую последовательность кнопок. В таких случаях мы можем использовать прикидку, чтобы проверить результат.

15 ПРИМЕР

Мурод вычислил значение каждого числового выражения и получил следующие результаты:

a) $62{,}9 - 4{,}67 \times 18{,}62 = 542{,}0446$;

b) $\sqrt{83} \div \sqrt[3]{130} = 1{,}798420573$.

Проверьте правильность каждого ответа с помощью прикидки.

РЕШЕНИЕ

a) Округлив числа до 1 значащей цифры, прикинем:

$$\begin{aligned} 62{,}9 - 4{,}67 \times 18{,}62 &\approx 60 - 5 \times 20 \\ &= 60 - 100 \\ &= -40 \end{aligned}$$

Каждое число округлено до 1 значащей цифры.

Оценочное значение равно –40 и не является близким к числу 542,0446. Значит, ответ Мурода неверный. Оценочное значение –40 ближе к точному ответу –24,0554.

b) Используя округлённые значения, из которых можно легко вычислить квадратные и кубические корни, мы можем сделать прикидку следующим образом:

$$\begin{aligned} \sqrt{83} \div \sqrt[3]{130} &\approx \sqrt{81} \div \sqrt[3]{125} \\ &= 9 \div 5 \\ &= 1{,}8. \end{aligned}$$

$9^2 = 81$, $5^3 = 125$

Оценочное значение 1,8 ближе к 1,798420573.
Значит, ответ Мурода верный.

15 ПРОВЕРЬТЕ СЕБЯ

Жасур вычислил значение каждого выражения и получил следующие результаты:

a) $79{,}5 - 33{,}21 \times 29{,}52 = -185{,}3592$;

b) $\sqrt[3]{7900} \div \sqrt{50} = 12{,}569\,805\,09$.

Проверьте правильность каждого ответа с помощью прикидки.

D Промежуточные погрешности

На промежуточных этапах расчёта мы можем столкнуться с неточными значениями. Например, $\sqrt{2}$ = 1,414 213 562 37 ... Предположим, нам нужно выразить окончательный ответ с точностью до 3 значащих цифр. До какого количества значащих цифр мы должны округлить число 1,414 213 562 37?



АКТИВИЗИРУЮЩЕЕ ЗАДАНИЕ 4

Цель: оценка погрешности.

Учитель приводит доказательство того, что 0,(9) = 1.

Доказательство:

Поскольку 0,(3) + 0,(3) + 0,(3) = 0,(9)

$\frac{1}{3}$ = 0,(3),

то $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}$ = 0,(9).

Также, $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}$ = 1, значит 0,(9) = 1.

Гули при выполнении этого задания другим способом получила другой ответ.

$\frac{1}{3} \approx 0{,}3$

Следовательно, $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3} \approx 0{,}3 + 0{,}3 + 0{,}3$

$= 0{,}9$ (округлено до 1 значащей цифры)

Она также поняла, что после округления значения учителя и её ответа получится число с 1 значащей цифрой.

1. До какого количества значащих цифр Гули округлила дробь $\frac{1}{3}$?
2. Как бы изменился её ответ, если бы она при промежуточных вычислениях округлила дробь $\frac{1}{3}$ до 2 значащих цифр? Заполните следующие поля.

$\frac{1}{3}$ = ☐ (округлено до 2 значащих цифр)

Следовательно, $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3} \approx$ ☐ + ☐ + ☐

= ☐

= ☐ (округлено до 1 значащей цифры)

3. Был бы ответ Гули таким же, как у учителя, если бы она округлила дробь $\frac{1}{3}$ до 3 значащих цифр?

Если в **активизирующем задании 4** на промежуточных этапах вместо точных значений использовать округлённые значения, окончательный ответ может отличаться от точного. Эти **промежуточные погрешности** вызваны погрешностями после округления разных степеней точности.

Однако при округлении $\frac{1}{3}$ до 2 или 3 значащих цифр получим такой же ответ, как и при округлении до 1 значащей цифры. В целом это также верно. Если окончательный ответ надо округлить до n значащих цифр, то значения промежуточных этапов надо будет округлять как минимум до $(n + 1)$ значащей цифры.



ОБРАТИТЕ ВНИМАНИЕ!

Если окончательный ответ должен быть округлён до 3 значащих цифр, то значения промежуточных этапов должны быть округлены как минимум до 4 значащих цифр.

16 ПРИМЕР

Площадь квадратной плитки составляет 2 m^2. Найдите периметр плитки, округлив ответ до 3 значащих цифр.



РЕШЕНИЕ

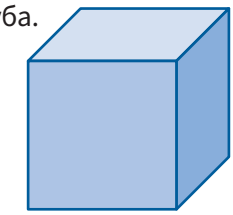
Площадь квадратной плитки = 2 m^2

Длина стороны квадратной плитки = $\sqrt{2}$
= 1,414 m (округлено до 4 значащих цифр)

Периметр квадратной плитки = 1,414 × 4
= 5,656
= 5,66 m (округлено до 3 значащих цифр)

16 ПРОВЕРЬТЕ СЕБЯ

Объём куба равен 10 cm^3. Найдите периметр одной грани куба. Ответ выразите в виде десятичной дроби с помощью калькулятора и округлите до сотых.



ОБРАТИТЕ ВНИМАНИЕ!

Так как в **активизирующем задании 4** ответ должен быть округлён до 3 значащих цифр, то значения промежуточных этапов должны быть округлены как минимум до 4 значащих цифр. Если в **примере 16** значения промежуточных этапов округлить до 3 з. ц., то есть, если значение будет равно 1,41, то окончательный ответ будет 5,64 m, а это неправильный ответ. Если при вычислении периметра использовать формулу: $\sqrt{2} \times 4$, то при округлении до 3 з. ц. получим ответ 5,66.

3.3 ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ

НАЧАЛЬНЫЙ УРОВЕНЬ

1 Вычислите без использования калькулятора, округлив все числа в выражении до 1 з. ц.

a) $125 + 3{,}91 \times 27{,}48$

b) $13{,}24 \times 4{,}83 \times 6{,}09$

c) $38\,467 \times 0{,}00296$

d) $1878 \div 19{,}2 \div 4{,}14$

e) $(16{,}9 - 5{,}47) \times 7{,}09$

f) $6{,}25^2 \div 4{,}38$

2 Вычислите с использованием калькулятора. Округлите ответы до 1 з. ц.

a) $(159 - 60{,}3) \times 7{,}58$

b) $6{,}03^2 \div 1{,}48$

c) $\sqrt{\dfrac{14{,}76 \times 80{,}2}{2{,}99}}$

d) $\dfrac{23{,}33 \times 1{,}991}{(0{,}202)^3}$

3 Проверьте правильность ответа каждого выражения с помощью прикидки.

a) $347 - 482 + 659 = -500$

b) $23{,}92 \times 4{,}801 = 1200$

c) $\sqrt{45} \div \sqrt[3]{9} \times \sqrt{99} = 87{,}4423591$

d) $\sqrt[3]{64} \div 0{,}418 = 10$

СРЕДНИЙ УРОВЕНЬ

4 У Мансура первоначально было 345 800 сумов. В супермаркете он потратил на покупку 4 товаров 36 100 сумов, 8600 сумов, 40 500 сумов и 29 900 сумов. Найдите оставшуюся сумму денег Мансура, округлив цену каждого товара до десятков тысяч сумов.

5 В соревнованиях по прыжкам в длину спортсмен за 4 попытки зафиксировал следующие показатели: 7,58 m, 7,62 m, 7,54 m и 7,63 m. Оцените без использования калькулятора:

a) общую длину 4 прыжков,

b) среднюю длину 4 прыжков.

6 Дано выражение

$$4{,}5012 - 3{,}2167 - 6{,}7183.$$

a) Округлите значение выражения до 3 з. ц.

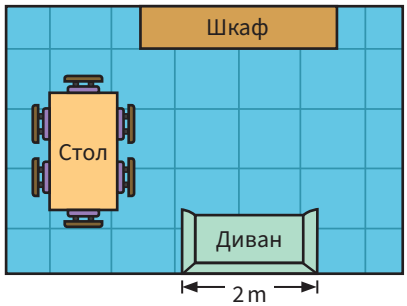
b) Вычислите значение выражения, округлив каждое число выражения до 3 з. ц. Округлите ответ до 3 з. ц.

c) Ответы **a)** и **b)** равны? Если нет, то какой из ответов точнее?

7 Ниже представлен чертёж комнаты в масштабе. Оцените следующее, если длина дивана составляет 2 m:

a) длину шкафа;

b) ширину стола.



8 Длина земельного участка прямоугольной формы равна 64,19 m, а ширина – 25,68 m.

a) Вычислите площадь участка, округлив ответ до 2 з. ц.

b) **1)** Округлите длину до 2 з. ц.

2) Округлите ширину до 2 з. ц.

3) Используя округлённые значения из пунктов **1)** и **2)**, вычислите площадь участка, округлив до 2 з. ц.

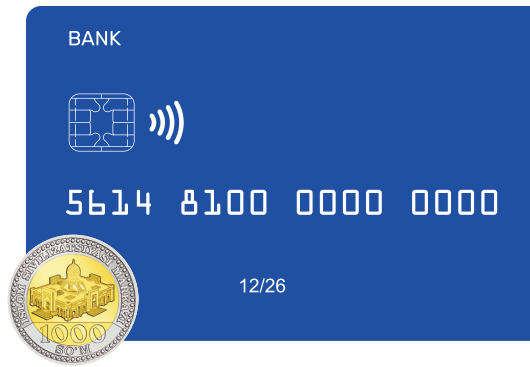
c) Равны ли ответы из пунктов **a)** и **b) 3)**? Если не равны, то какой ответ точнее?

ВЫСОКИЙ УРОВЕНЬ

9 открытое

В пробке на Ташкентской кольцевой дороге стоят 96 машин. Оцените длину пробки с помощью прикидки, если длина каждой машины равна приблизительно 4,5 m. Какое ещё предположение можно сделать при оценке?

10



Нортой и Фаррух для оценки площади пластиковой карты использовали следующие способы.

Способ Нортоя:

Шаг 1 Вычислить площадь одной монеты.

Шаг 2 Оценить число монет, которыми можно покрыть пластиковую карту.

Шаг 3 Оценить площадь карты.

Способ Фарруха:

Шаг 1 С помощью монеты оценить длину и ширину карты.

Шаг 2 Оценить площадь карты.

Чей способ оценки площади пластиковой карты точнее? Обоснуйте свой ответ.

11 открытое

Максимальная грузоподъёмность лифта – 600 kg. У лифта стоят 8 человек, масса которых составляет: 71,8 kg, 73,4 kg, 75,3 kg, 74,8 kg, 76,4 kg, 73,9 kg, 78,4 kg и 77,4 kg.

a) Оцените общую массу людей, округлив массу каждого человека до 2 з. ц.

b) Можно ли всем людям одновременно зайти в лифт, учитывая грузоподъёмность лифта и округлённые значения из пункта **a)**?

c) Найдите точную массу 8 человек и сравните с ответом из пункта **b)**.

d) Определите с помощью прикидки число людей, при котором лифт не будет перегружен.

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ИЗ ГЛАВЫ 3

ОКРУГЛЕНИЕ

Округление величины – это нахождение значения, соответствующего определённой степени точности.

Правила округления натуральных чисел / десятичных дробей до заданного разряда

1. Посмотрите на цифру указанного разряда.
2. Посмотрите на цифру справа. Если эта цифра равна или больше 5, то число округляется с избытком. Если эта цифра меньше 5, то число округляется с недостатком.

Примеры:

Округление натуральных чисел до заданного разряда

34 267 = 34 000 (округлено до разряда тысяч)

Приведите пример округления числа до сотен.

Округление десятичных дробей до заданного разряда

6,0784 = 6,08 (округлено до 2-го разряда после запятой)

Приведите пример округления числа до 1-го разряда после запятой.

Правила определения значащих цифр

1. Все цифры, отличные от 0, – значащие цифры.
2. Все цифры между цифрами, отличными от 0, значащие цифры.
3. Для произвольного целого числа последние нули могут и не быть значащими цифрами. Это зависит от того, каким образом округлено число.
4. В произвольной десятичной дроби все нули, предшествующие первой цифре, отличной от 0, не являются значащими цифрами.
5. В произвольной десятичной дроби все нули после первой цифры, отличной от 0, – значащие цифры.

Правила округления числа до значащей цифры

1. Найдите значащую цифру, указанную слева направо.
2. Посмотрите на цифру справа. Если эта цифра равна или больше 5, то число округляется с избытком. Если эта цифра меньше 5, то число округляется с недостатком.

Пример:

0,02047 = 0,0205 (округлено до 3 з. ц.).

Приведите свои два примера.

ПРИКИДКА (ОЦЕНКА)

Прикидка – процесс нахождения округлённого значения числа или величины.

Способы прикидки

a) **В числах**
   1) Округлите числа.
   2) Воспользуйтесь групповым значением.

b) **В величинах**
   1) Воспользуйтесь шаблонными (эталонными) мерами.
   2) Воспользуйтесь способом разбора-сбора (декомпозиции-рекомпозиции).

Промежуточные погрешности

В числовых расчётах промежуточные погрешности могут возникать из-за округления промежуточных значений до разной степени точности. Если окончательный ответ должен быть округлён до 3 з. ц., то значения промежуточных этапов должны быть округлены как минимум до 4 з. ц.

ПРИЧИНЫ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ОКРУГЛЕНИЯ И ПРИКИДКИ (ОЦЕНКИ)

a) Трудно получить точные значения из-за ограничений измерительных инструментов.
b) Нет возможности использовать точное значение.
c) Очень сложно получить точное значение.
d) Полезно для проверки правильности и обоснованности ответов при расчёте.

ПОВТОРЕНИЕ ГЛАВЫ 3

1 Вычислите: $3\frac{1}{2} \times 7\frac{1}{3} + \left(-1\frac{1}{8}\right) \div 2\frac{1}{4}$.

a) Найдите точное значение ответа.

b) Округлите ответ до 2-го разряда после запятой.

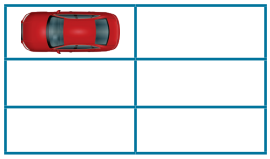
c) Округлите ответ до 3 з. ц.

2 Цены трёх товаров: 16 950 сумов, 23 400 сумов и 5150 сумов.

a) Оцените общую сумму этих трёх товаров, округлив цены до 1 з. ц.

b) Хватит ли Нурбеку денег на покупку этих товаров, если у него 50 000 сумов?

3 На рисунке изображена автостоянка на 6 одинаковых автомобилей.



Длина каждого автомобиля – 4,5 m, а ширина – 1,7 m. Оцените с помощью прикидки:

a) измерения каждого места,

b) площадь автостоянки.

4 Эльдор для измерения своей массы использовал разные весы. Весы A показали 53,0 kg, а весы B показали 53,00 kg. В весах используется одинаковая степень точности? Если не одинаковая, то показания каких весов более точные?

5 Радиус круга, округлённый до ближайшего сантиметра, равен 18 cm, а его точное значение – это десятичная дробь с одной цифрой после запятой. Найдите наибольшую погрешность при вычислении площади круга, используя округлённое значение 18 cm. Округлите ответ до 3 з. ц.

6 Акмаль и его родители планируют путешествие в Сеул. Они собираются пробыть в Южной Корее 4 дня и 3 ночи. Акмаль должен заказать 3 авиабилета для взрослых и забронировать гостиницу на 3 ночи. Оцените, используя следующую таблицу.

$710,2 на одного человека	**Ташкент – Сеул** 22:30 – 08:40 6 часов 10 минут

Цена гостиницы (доллары США)			
Дата	4 апреля	5 апреля	6 апреля
Цена	198	189	209

a) Найдите общую сумму, которую Акмаль должен заплатить за авиабилеты и проживание, округлив общую сумму до сотен долларов.

b) Обменный курс узбекского сума (UZS) к доллару США (USD): 1 доллар США = 12 339,85 сума. Вычислите стоимость путешествия в сумах. Округлите ответ до десятков тысяч сумов.

7 Для измерения массы предметов A и B используются сверхчувствительные весы со степенью точности 0,0001 g.

a) Масса предмета A равна 40,0005 g. Округлите это значение до 3 з. ц.

b) Масса предмета B равна 2,01 g (округлено до 3 з. ц.). Какими будут наибольшее и наименьшее возможные значения? Обоснуйте свой ответ.

8 Сумму трёх последовательных чётных чисел приблизительно оценили в 200. Если 200 – это значение, округлённое до 1 з. ц., то найдите следующее:

a) наименьшие значения трёх чисел,

b) наибольшие значения трёх чисел.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

1. Опишите некоторые реальные ситуации, когда округлённые значения важнее точных. Объясните, почему вы так думаете.
2. Опишите две ситуации из вашей жизни, в которых прикидка была полезна.